Lattès 写像入門

t888

2026 年 11 月 10 日

概要

本稿では, 楕円曲線の自己射に由来する有理関数である Lattès 写像の定義と具体例を紹介し, 前周期点と楕円曲線の捩れ点との関係について考察する.

1 記号

本稿では

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

とする. また

$$\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

を, 次数 2 以上の有理関数とする.

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, ϕ の n-周期点のなす集合を

$$\mathrm{Per}_n(\phi) \coloneqq \{z \in \mathbb{P}^1 \mid \phi^n(z) = z, \phi^m(z) \neq z\,(1 \leq \forall m < n)\}$$

とする. また, ϕ の前周期点全体の集合を

$$\mathrm{PrePer}(\phi) \coloneqq \{z \in \mathbb{P}^1 \mid \phi^m(z) = \phi^n(z)\ (\exists m > \exists n \geq 0)\}$$

とする. 参考までに前周期点とは, 雑に言えば, いずれ周期性が現れる点のことである. 上の定義において $n = 0$ とすれば $\phi^m(z) = z$ となるが, これは z が ϕ の周期点であることを意味する.

楕円曲線 $(E, \mathcal{O})$ と $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, E_{tor} は楕円曲線 E の捩れ部分群を表す.

$$E[m] \coloneqq \{P \in E \mid [m]P = \mathcal{O}\}, \quad E_{\mathrm{tor}} \coloneqq \bigcup_{m \geq 1} E[m].$$

E の自己同種写像と零射のなす集合を $\mathrm{End}(E)$ とする.

※楕円曲線の同種写像 (isogeny) の定義と性質は付録にまとめた.

2 Lattès 写像

定義 1. $\mathbb{C}$ 上定義された楕円曲線 E と全射 $\pi\colon E \to \mathbb{P}^1$ 及び射 $\psi\colon E \to E$ が存在して, $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & E \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$ が可換

となるとき, $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を **Lattès 写像**という.

例 2. アフィン部分が $y^2 = x^3+ax+b$ で書ける楕円曲線 $E/\mathbb{C}$ における二倍写像 [2] を考える. $(x, y) \in E\backslash E[2]$ に対して, $[2](x, y)$ の x 座標は $\dfrac{x^4 - 2ax^2 - 8bx + a^2}{4x^3 + 4ax + 4b}$ と書ける. このとき上の可換図式において $\pi = x$ とすると $\phi(z) \coloneqq \dfrac{z^4 - 2az^2 - 8bz + a^2}{4z^3 + 4az + 4b}$ は Lattès 写像である.

例 3. $u \coloneqq \displaystyle\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$ として, Jacobi の楕円関数は, 逆関数 $x = \mathrm{sn}(u)$ で定められる. ただし $k^2 \neq 0, 1$ である. また, $\mathrm{cn}(u), \mathrm{dn}(u)$ を次のように定める.

$$\mathrm{cn}(u) = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2(u)}, \quad \mathrm{dn}(u) = \sqrt{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u)}.$$

このとき $\mathrm{sn}(2u)$ の加法定理が成り立つ.

$$\mathrm{sn}(2u) = \frac{2\mathrm{sn}(u)\mathrm{cn}(u)\mathrm{dn}(u)}{1 - k^2\mathrm{sn}^4(u)}.$$

ここで $z = x^2 = \mathrm{sn}^2(u)$ とおき, 有理関数 ϕ を

$$\phi(z) = \frac{4z(1-z)(1-k^2z)}{(1-k^2z^2)^2}$$

で定めると,

$$\mathrm{sn}^2(2u) = \phi(\mathrm{sn}^2(u))$$

が成り立つ. E_k を $y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$ を定義方程式とする楕円曲線とすると, この ϕ は $\begin{array}{ccc} E_k & \xrightarrow{[2]} & E_k \\ {\scriptstyle x^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x^2} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$ が可換となるような Lattès 写像である.

楕円曲線の捩れ点とは, ある正整数倍が単位元となる点である. 一方, 力学系における周期点とは, 写像を繰り返し作用させることで元の点に戻る点である. 一見すると, 楕円曲線の群構造と有理写像の反復は異なる数学的対象に思える. しかし Lattès 写像を通じて, 両者の間に興味深い関係が現れる. 次の定理は Lattès 写像の前周期点が楕円曲線の捩れ点によって特徴づけられることを示すものであり, 数論と力学系が交わる一つの美しい例である.

定理 4 ([2] Proposition 6.44)**.** $\phi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を Lattès 写像とする. このとき ϕ に付随する可換図式を $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & E \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$ とすると, 次が成り立つ.

$$\mathrm{PrePer}(\phi) = \pi(E_{\mathrm{tor}}).$$

証明. 射 $\psi\colon E \to E$ はある同種写像 ψ_0 と, ある点 $Q \in E$ に関する平行移動 τ_Q の合成で書けることに注意する (定理 7 参照). すなわち任意の点 $P \in E$ に対して $\psi(P) = \psi_0(P) + Q$ と書けるような点 $Q \in E$ が存在する. 簡単のため, 以下では $Q = \mathcal{O}$ のときを示す. すなわち以下では ψ は同種写像であるとする.

任意の点 $P \in E$ と $\zeta \in \mathbb{P}^1$ を, $\pi(P) = \zeta$ となるようにとる. このとき軌道に着目すると, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\pi(\mathcal{O}_\psi(P)) &= \pi(\{\psi^n(P) \mid n \geq 0\}) \\ &= \{\pi\psi^n(P) \mid n \geq 0\} \\ &= \{\phi^n\pi(P) \mid n \geq 0\} \\ &= \{\phi^n(\zeta) \mid n \geq 0\} \\ &= \mathcal{O}_\phi(\zeta).\end{aligned}$$

π は全射であることに注意すると, 上式から次の同値が従う.

$$(P \in E_{\mathrm{tor}} \iff) \ \mathcal{O}_\psi(P) \text{ は有限集合} \iff \mathcal{O}_\phi(\zeta) \text{ は有限集合} \ (\iff \zeta \in \mathrm{PrePer}(\phi)).$$

よって $\mathrm{PrePer}(\phi) = \pi(\mathrm{PrePer}(\psi))$ が成り立つので, 次を示せばよいことが分かった.

$$\mathrm{PrePer}(\psi) = E_{\mathrm{tor}}.$$

以下では各々の包含について議論する.

任意の点 $P \in E_{\mathrm{tor}}$ をとり, $[n]P = \mathcal{O}$ とする. 今, $\mathrm{End}(E)$ は有理整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは虚二次体の整環のいずれかに同型であった (定理 9 参照). いずれの場合にせよ, 商環 $\mathrm{End}(E)/n\mathrm{End}(E)$ は有限集合である. よって $\psi^i \equiv \psi^j \mod n\mathrm{End}(E)$ となる整数 $i > j \geq 1$ が存在する. このとき $\psi^i = \psi^j + n\beta$ となる $\beta \in \mathrm{End}(E)$ が存在する. 両辺に P を代入することで, $[n]P = \mathcal{O}$ に注意すれば $\psi^i(P) = \psi^j(P)$ が得られる. これは $P \in \mathrm{PrePer}(\psi)$ を意味する.

任意の点 $P \in \mathrm{PrePer}(\psi)$ をとり, $\psi^i(P) = \psi^j(P)$ とする. ただし $i > j$ とする. このとき $(\psi^i - \psi^j)(P) = \mathcal{O}$ が成り立つ. ここで左辺の双対同種写像 $\widehat{(\psi^i - \psi^j)}$ を両辺に作用させることで $[\deg(\psi^i - \psi^j)](P) = \mathcal{O}$ を得る (定理 8 参照). さて, $\deg(\psi) = \deg(\phi) \geq 2$ と $i \neq j$ より, $\psi^i \neq \psi^j$ である. よって $\deg(\psi^i - \psi^j) > 0$ であるから, $P \in E_{\mathrm{tor}}$ を得る. □

3 付録 (楕円曲線の同種写像)

前節の証明では, 楕円曲線の自己同種写像や双対同種写像の性質を用いた. これらは楕円曲線の群構造を調べるうえで基本的な役割を果たす. ここでは, 証明で用いた事実を整理するとともに, 楕円曲線の同種写像について必要な性質をまとめておく.

定義 5. $(E_1, \mathcal{O}_1), (E_2, \mathcal{O}_2)$ をそれぞれ楕円曲線とする. このとき $\psi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$ を満たす射 $\psi\colon E_1 \to E_2$ を**同種写像 (isogeny) という.**

定理 6 ([1] Ⅲ.4.8)**.** 同種写像は準同型である.

証明. $\psi\colon E_1 \to E_2$ を同種写像とする. このとき任意の点 $P, Q \in E_1$ に対して $\psi(P+Q) = \psi(P) + \psi(Q)$ となることを示す. ψ が定数写像のときは $\psi(P) = \psi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$ となることから明らか. 以後 ψ が定数写像でない (すなわち有限射) ときについて考える. ここで

$$\psi_*\colon \mathrm{Pic}^0(E_1) \to \mathrm{Pic}^0(E_2), \quad \sum n_i(P_i) \text{ の類} \mapsto \sum n_i(\psi P_i) \text{ の類}$$

及び

$$\kappa_1 \colon E_1 \to \mathrm{Pic}^0(E_1), \quad P \mapsto ((P) - (\mathcal{O}_1)) \text{ の類},$$
$$\kappa_2 \colon E_2 \to \mathrm{Pic}^0(E_2), \quad P \mapsto ((P) - (\mathcal{O}_2)) \text{ の類}$$

に関して, 可換図式 $\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\kappa_1} & \mathrm{Pic}^0(E_1) \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_*} \\ E_2 & \xrightarrow{\kappa_2} & \mathrm{Pic}^0(E_2) \end{array}$ が得られる. ただし $i = 1, 2$ に対して, $\mathrm{Pic}^0(E_i)$ は E_i の Picard 群である. ψ_* は準同型, κ_1, κ_2 はいずれも同型であるから, $\psi = (\kappa_2)^{-1} \circ \psi_* \circ \kappa_1$ は準同型となる. □

定理 7 ([1] Ⅲ.4.7)**.** 楕円曲線の間の射は, 同種写像と平行移動の合成で書ける.

証明. $F \colon E_1 \to E_2$ を楕円曲線の間の射とする. このとき合成写像 $\phi \coloneqq \tau_{-F(\mathcal{O}_1)} \circ F$ は, $\phi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$ となることが確かめられるので, 同種写像となる. ここで各点 $P \in E_2$ に対して τ_P は, 次で定義されるような平行移動を表す.

$$\tau_P \colon E_2 \to E_2, \quad \tau_P(Q) \coloneqq P + Q \quad (\forall P, Q \in E_2).$$

よって F は, $F = \tau_{F(\mathcal{O}_1)} \circ \phi$ と書ける. □

定理 8 ([1] Ⅲ.6.1)**.** $\psi \colon E_1 \to E_2$ を次数 m の同種写像とする. このとき次を満たす同種写像 $\widehat{\psi} \colon E_2 \to E_1$ が唯一つ存在する.

$$\widehat{\psi} \circ \psi = [m]$$

この $\widehat{\psi}$ を ψ の**双対同種写像 (dual isogeny) という.**

証明.（存在）有限関数体拡大 $\mathbb{C}(E_1)/\psi^*\mathbb{C}(E_2)$ は標数 0 なので分離的である。よって [1] III.4.10(c) により $\#\ker\psi = m$ である. Lagrange の定理より, $\mathrm{Ker}\psi \subseteq E_1[m]$ が従う. したがって [1]Ⅲ.4.11 を ψ と $[m]_{E_1}$ に適用すると, $\widehat{\psi} \circ \psi = [m]_{E_1}$ を満たす同種写像 $\widehat{\psi} : E_2 \to E_1$ が得られる.
(唯一性) ψ は全射であるから, $\widehat{\psi} \circ \psi = \widehat{\psi'} \circ \psi$ から直ちに従う. □

定理 9 ([1] Ⅲ.9.4)**.** $\mathrm{End}(E)$ は有理整数環 $\mathbb{Z}$ あるいは虚二次体の整環のいずれかに同型である.

証明. 省略. □

注意 10. ほとんどの楕円曲線は $\mathrm{End}(E) \cong \mathbb{Z}$ である. 一方 $\mathrm{End}(E)$ が虚二次体 K の整環と同型となるとき, E は K を**虚数乗法 (complex multiplication)** に持つという.

また今は楕円曲線の定義体の標数が 0 であるが, そうでないときは $\mathrm{End}(E)$ は四元数環の整環になりうる.

参考文献

[1] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 106, Springer, New York, 2009.

[2] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Dynamical Systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007.