

"Galois Theory of Linear Differential Equations"

(Marius van der Put - Michael F. Singer)

§1.1 Differential rings and fields

Def 1.1

- R : ring.
- $\partial: R \rightarrow R$: derivation $\Leftrightarrow \forall a, b \in R, \begin{cases} (i) \partial(a+b) = \partial a + \partial b, \\ (ii) \partial(ab) = \partial a \cdot b + a \partial b. \end{cases}$
- (R, ∂) : differential ring $\Leftrightarrow R$: ring, ∂ : der.
- (R, ∂) : differential field $\Leftrightarrow R$: field, ∂ : der.

Rem. $\partial \in \text{單上}$ $\Rightarrow \exists \neq 0 \text{ あり}$.

Def 1.4

- $(R, ')$: diff. ring.
- $C = C_R := \{c \in R \mid c' = 0\}$.

Exercise 1.5.2

- R : diff. ring, $C = C_R$: const.
- (a) $C \subset R$: subring
- (b) R : field $\Rightarrow C$: field.

§1.2 Linear differential equations

Def 1.6

$(k, '): \text{diff. field}$,

$\mathcal{M}: k\text{-vect sp. of dim } n$,

$\partial: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}: \text{no } \partial \neq 0 \mid \partial = \text{hom.}$

$(\mathcal{M}, \partial): \text{differential module}$

$\Leftrightarrow \forall f \in k, \forall m \in \mathcal{M}, \partial(fm) = f'm + f \cdot \partial(m)$.

Rem. $\mathcal{M} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_k, \mathcal{M} = ke$ (e -basis).

$$\partial e := ae \quad (a \in k)$$

$$\text{no } \partial(fe) = f'e + f \cdot \partial e = f'e + fae = (f' + fa)e.$$

Rem. $\mathcal{M} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_k \subseteq \text{diff. mod } \mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{E}$.

$A = (a_{ij}) \in M_n(k) \mathcal{E}$. : $\mathcal{E}$ is a diff. field.

$$\partial e_i = - \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j.$$

$\therefore \text{no } \mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{E} \forall m = \sum_{i=1}^n f_i e_i \in \mathcal{M} \mid \mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{E}$

$$\partial m = \partial \left(\sum_{i=1}^n f_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \partial(f_i e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (f_i' e_i - f_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i' e_i - \sum_{i=1}^n f_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i' e_i - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} f_j \right) e_i$$

$\mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{E}, \partial m = 0 \mathcal{E} \mathcal{E} \mathcal{E}$

$$\sum_{i=1}^n f_i' e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} f_j \right) e_i$$

$$\Leftrightarrow (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \vdots \\ \varphi'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

のふた, DE の導出.

以上より

「 n 個の DE $\varphi'_i = A \varphi_i$ を解く」

に注意

「 $\partial M = 0$ となる $M \in \mathcal{M}$ を求める」

に注意, 同じことである.

Rem. K の導出は, $M_n(K)$ の微分を ∂ (導出) する. ($\partial(a_{ij}) := (\partial a_{ij})$)

に注意: 次が成り立つ:

$$\forall A, B \in M_n(K), \forall y \in K^n, \begin{cases} (i) (AB)' = A'B + AB' \\ (ii) (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1} \\ (iii) (Ay)' = A'y + Ay' \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{ii} E' = (AA^{-1})' = A'A^{-1} + A(A^{-1})' \\ \therefore (A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1} \quad \square \end{array} \right)$$

Rem. $y' = Ay$ ($A \in M_n(K), y \in K^n$) を考える.

今, y と $f \in K^n$ に $y = Bf$ ($B \in GL_n(K)$) と置く関係があるとする.

に注意: f についての DE $f' = \hat{A}f$ はこのようにして導出されるのを考える.

$$y' = Ay \Leftrightarrow (Bf)' = ABf$$

$$\Leftrightarrow B'f + Bf' = ABf$$

$$\Leftrightarrow Bf' = ABf - B'f = (AB - B')f$$

$$\Leftrightarrow f' = B^{-1}(AB - B')f = (B^{-1}AB - B^{-1}B')f$$

$$\therefore \hat{A} = (B^{-1}AB - B^{-1}B')$$

Def

(i) $A \in GL_n(k)$ と $\hat{A} \in GL_n(k)$ が F.S. 値

: $\Leftrightarrow \exists B \in GL_n(k)$ s.t. $\hat{A} = (B^{-1}AB - B^{-1}B')$.

(ii) $y' = Ay$ と $y' = \hat{A}y$ は F.S. 値

: $\Leftrightarrow$ 同値 diff. mod k の解として $DE = 0$ となる。

Lem 1.7

$y' = Ay : DE/k$.

$u_1, \dots, u_r$: sol. (i.e. $u_i' = Au_i$ ($i=1, \dots, r$))

$u_1, \dots, u_r$: lin. dep. / $k \Rightarrow$ lin. dep. / C .

pf. $u_1, \dots, u_r$ が lin. dep. / k とする。

今 $\{u_1, \dots, u_r\}$ の 真の部分集合 が lin. indep. / k と ≤ 2 となる。

$\therefore$ の $\exists$, $u_1 = \sum_{i=2}^r a_i u_i$ ($a_i \in k$) と unique に書ける。

$\therefore \exists$ 2'

$$0 = u_1' - Au_1$$

($\because u_1$: sol of $y' = Ay$)

$$= \sum_{i=2}^r (a_i' u_i + a_i u_i') - A \sum_{i=2}^r a_i u_i$$

$$= \sum_{i=2}^r a_i' u_i + \sum_{i=2}^r a_i (u_i' - Au_i)$$

$$= \sum_{i=2}^r a_i' u_i$$

($\because u_2, \dots, u_r$: sol)

$\therefore$ $u_2, \dots, u_r$ は lin. indep. / k かつ $a_i' = 0$ ($i=2, \dots, r$).

$\therefore a_i \in C$ ($\forall i=2, \dots, r$).

$\therefore$ $u_1 = \sum_{i=2}^r a_i u_i$ $\therefore$ $u_1, \dots, u_r$ は lin. dep. / C と $\exists$ 2' と $\exists$ 2

矛盾。 $\square$

Lem 1.8

$\forall A \in M_n(k)$, $V_A := \{u \in k^n \mid u' = Au\}$: vect. sp. / C of $\dim \leq n$.

Def 1.9.

R : diff. ring

$k \subset R$: diff. field

$A \in M_n(k)$.

$F \in GL_n(R)$: fundamental matrix for $y' = Ay$

$$: \Leftrightarrow F' = AF.$$

Rem. F : fund matrix of $y' = Ay$

$$\Rightarrow \{F_0 \in GL_n(R) \mid F_0: \text{fund. matrix for } y' = Ay\} = F \cdot GL_n(C)$$

① ② $\forall \tilde{F} \in GL_n(R)$: fund. matrix $\neq F$, $\exists M \in \tilde{F} = FM$ なるものがある。
すなわち

$$AFM = A\tilde{F} = \tilde{F}' = (FM)' = F'M + FM' = AFM + FM'$$

すなわち $FM' = 0$. $\therefore M' = 0$ (i.e. $M \in GL_n(C)$)

③ $\forall M \in GL_n(C)$ なるものがあり、次のように成り立つ:

$$(FM)' = F'M + FM' = F'M = AFM. \quad \square$$

Def

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b \quad (a_i \in k)$$

の形のもので $DE \in$, (linear) scalar DE / k である。

すなわち、 $b = 0$ のときは homogeneous である、 $b \neq 0$ のときは inhomogeneous である。

Def

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

$$\leadsto y' = A_L y, \quad A_L := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

↑ companion matrix

Rem. A_L : companion matrix は, 次 ≤ 3 / $\exists \lambda \in \mathbb{C}$:

$$\varphi: \{y \in \mathbb{R} \mid L(y) = 0\} \rightarrow \{Y \in \mathbb{R}^n \mid Y' = A_L Y\}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ y \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} \uparrow \\ Y := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

φ は Iso. as vect. sp. / $\mathbb{C}$ である。

従って, 2 homo. scalar DE は, 3行3列微分方程式の特別の場合と見做せる。

Lem 1.10

$$\left\{ \begin{array}{l} L(y) = 0 : \text{homo. scalar DE} / k \\ V := \{u \in k \mid L(u) = 0\} : \text{vect sp. / } \mathbb{C} \text{ of dim} \leq n. \end{array} \right.$$

pf. Lem 1.8. 5/ ok. $\square$

更に, matrix DE $Y' = AY$ は $\mathbb{C}^2$, 次 n 成立つ :

$$\exists \text{ scalar DE } L(y) = 0 \text{ s.t. } Y' = AY \text{ と } Y' = A_L Y \text{ は 同値}$$

$$\left(\textcircled{\text{cf.}} \text{ ch}(k) = 0 \text{ なら, cyclic vector の存在が保証される. cf. §2.1.} \right)$$

Def 1.11.

$y_1, \dots, y_n \in k$ の Wronskian ε 次 2^n である :

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

また, $wr(y_1, \dots, y_n) := \det(W(y_1, \dots, y_n))$ と定める。

Lem 1.12.

$$y_1, \dots, y_n \in k : \text{lin. dep. / } \mathbb{C} \Leftrightarrow wr(y_1, \dots, y_n) = 0.$$

pf. $\Rightarrow C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0$ である.

$$\begin{cases} C_1 y_1 + \dots + C_n y_n = 0 \\ C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases} \quad \sim \text{wr}(y_1, \dots, y_n) = 0.$$

$\Leftarrow \exists$ scalar monic DE of order n/k $L(y) = 0$.

$$\begin{aligned} \textcircled{\ast} L_1(y) &:= \begin{cases} y' - \frac{y_1'}{y_1} y & (y_1 \neq 0) \\ y' & (y_1 = 0) \end{cases} \\ L_{m+1}(y) &:= \begin{cases} L_m'(y) - \frac{L_m'(y_{m+1})}{L_m(y_{m+1})} L_m(y_{m+1}) & (L_m(y_{m+1}) \neq 0) \\ L_m'(y) & (L_m(y_{m+1}) = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

である, $L_{m+1}(y_i) = 0$ ($i = 1, \dots, m+1$) である.

$L = L_m$ である.

$$Y_i := \begin{pmatrix} y_i \\ y_i' \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_L, Y_i' = A_L Y_i \text{ である. (i.e. } A_L: \text{companion matrix)}$$

仮定 $\text{wr}(y_1, \dots, y_n) = 0$ より, $y_1, \dots, y_n$ は lin. dep. / k である.

以上より, Lem 1.7. より $y_1, \dots, y_n$ は lin. dep. / $\mathbb{C}$ である. $\square$

§1.3. Picard - Vessiot Extensions

1.1.2.12 $\left\{ \begin{array}{l} \cdot k: \text{diff. field}, \mathbb{Q} \subset k. \\ \cdot C = \{ C \in k \mid C' = 0 \} : \text{st. closed sub.} \\ \cdot (R, '): \text{diff. ring}, I \subset R: \text{ideal} \end{array} \right. \quad \text{とある.}$

Def
 I : differential ideal of $R \leftarrow I' := \{ f' \in R \mid f \in I \}.$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) I: \text{ideal of } R \\ (ii) \forall f \in I, f' \in I. \end{array} \right.$
 $\forall C \in C \nrightarrow I'$ is module とある.

Rem. $R: \text{diff. ring} / k, I \subset R: \text{diff. ideal} \Rightarrow R/I: \text{diff. ring} / k$

Def
 R : simple diff. ring
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) R: \text{diff. ring} \\ (ii) R \text{ の diff. ideal だけ } 0 \subset R \text{ だけ } \nrightarrow \end{array} \right.$

Def 1.15 $\leftarrow$ Picard Vessiot ring の存在は Prop 1.20 $A \in M_n(k)$
 R : Picard - Vessiot ring / k for $y' = Ay \leftarrow$
 $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (i) R: \text{simple diff. ring}, \\ (ii) \exists F \in GL_n(R): \text{fund. matrix for } y' = Ay, \\ (iii) \text{上の } F = (f_{ij})_{i,j} \text{ に対し, } R = k[\{ f_{ij} \}_{i,j}, (\det F)^{-1}]. \end{array} \right.$
 最小分解体のキモチ

R : Picard - Vessiot ring for $\mathcal{M} \leftarrow \mathcal{M}: \text{diff. mod.} / k$
 $\Leftrightarrow R$: Picard - Vessiot ring / k for $y' = Ay$ (A : ass. w/ $\mathcal{M}$)

Rem. A と $\tilde{A}$ が同じ値ならは, 対応する Picard - Vessiot ring は $F(\bar{k})$ である.
 (Exercise 1.16)

Lem 1.17

R : simple diff. ring / k

(i) R は 0 以外に零因子を持たない. (i.e. R : ID)

(ii) R : f.g. / $k \Rightarrow C_{\text{frac}}(R) = C_k$

pf. (i) まず、次の成り立ちを証明する:

$a \in R \setminus \{0\}$: non-nilpotent $\Rightarrow a \in R$: non-zero div.

(:) $a \in R \setminus \{0\}$: non-nilpotent に対し

$I_a := \{b \in R \mid a^n b = 0 \text{ } (\exists n \geq 1)\} \subseteq R$

は diff. ideal of R である.

R は simple かつ $I_a = 0$.

よって $a \cdot b = 0$ ($\exists b \in R \setminus \{0\}$) を仮定すると、 $b \in I$

$\therefore b = 0$ 矛盾.

$J := \{a \in R \mid \text{nilpotent}\} \subseteq R$ は diff. ideal である.

(:) J は R である ideal であることは OK

$\forall a \in J$ に対し $a' \in J$ を示す.

$a = 0$ のときは OK.

$a \neq 0$ のとき、 $a^n = 0$ となる最小の $n \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ かつ $n a^{n-1} a' = 0$ かつ a' は zero-div. である.

(:) $a \in k$

$\therefore a$: nilpotent (i.e. $a' \in J$)

$\therefore J = 0$

$\therefore R \setminus J = \{a \in R \mid \text{non-nilpotent}\} = R \setminus \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ 明らか.

$\subset \forall a \in \text{frac}(k) \setminus \{0\}$ に対し $a' = 0$ となる.

$I_a := \{b \in R \mid ba \in R\}$ は diff. ideal of R である.

$I_a \neq 0$ かつ $I_a = R$ である.

$\exists z, a \notin C_k$ を仮定する.

例 1. $1 \in (a-c)R$ かつ $a-c \in R^\times$.

2011.4
| $c_h(k) = 0$, $R: \text{f.g ID} / k$, $k \in R$.

$$\{c \in k \mid a - c \in R^\times\} : \text{infinite set} \Rightarrow a : \text{alg} / k$$

≥ 2 a min. poly. / $k \in P(x) = x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \dots + c_0 \in k[x] \Rightarrow \exists$.

$$da^{d-1}a' + \sum_{i=0}^{d-1} (c_i a^i + c_i \cdot i a^{i-1} a') = 0$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{d-1} c'_i a^i = 0 \quad (\odot a' = 0)$$

$$Q(x) := \sum_{i=0}^{d-1} c_i x^i \text{ とおくと, } d \text{ の最小値は } Q(x) = 0.$$

$$\therefore C'_0 = \dots = C'_{d-1} = 0 \quad (\text{i.e. } C_0, \dots, C_{d-1} \in C_k)$$

$$\therefore p(x) \in C_p[X].$$

$$C_k = \overline{C_k}^{alg} \text{ 且 } a \in C_k. \dots \text{矛盾. } \square$$

e.g. 1.18 $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (*) \quad (a \in k) \text{ a Picard-Vessiot ring } H,$

$y' = 0$ 解之 呈成 14 个.

① (i) $y' = Ay$ 解 $y \in K$ を持つとき, (*) の fund. matrix は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。
 K は diff. field かつ simple である。

5.2. $b \in k$, $\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$, $R = k$ ist Picard-Vessiot ring z.B.

(iii) $y' = a b^u k 2^u$ 解を対数をとる

$\gamma' = a \in \mathbb{Z}_2$, diff. ring / k $R = k[\gamma]$ 決定する.

(cf. Exercise 1.5-(e))

$\Rightarrow$ $\exists R$ は $y' = a$ の解 γ を含む. $\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ かつ (*) の fund matrix

また, R は simple (diff. ring) である.

また, R は simple (diff. ring) である。
 (2) $I \neq \{0\}$ ならば, I は non-trivial ideal of R である。
 このとき I は, ある $F = Y^n + f_{n-1}Y^{n-1} + \dots + f_0$ を生成する。

$$F' = nY^{n-1}Y' + (n-1)f_{n-1}Y^{n-2} + \dots + f_0'$$

このとき I は, ある $F = f_n \tau^n + f_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + f_0$ を生成する.

$$F' = n r^{n-1} r' + (n-1) f_{n-1} r^{n-2} + \dots + f'_0$$

$$\begin{aligned}
 &= (na + f'_{n-1})Y^{n-1} + \dots + f'_0. \\
 &\text{If diff. ideal exists then} \\
 &F' \in I = (F) \leadsto F' = 0 \quad (\text{⊙ } n \text{ is min, } \deg(F') < \deg(F)) \\
 &\leadsto na + f'_{n-1} = 0 \\
 &\leadsto a = -\frac{f'_{n-1}}{n} = -\left(\frac{f'_{n-1}}{n}\right)' \\
 &\dots \text{矛盾} \quad (\text{⊙ } y' = a \text{ is solvable over } k)
 \end{aligned}$$

よ2. $R = k[Y]$ is Picard-Vessiot ring exists. $\square$

eg. 1.19 $y' = ay \quad (a \in k^\times).$

$R = k[T, T^{-1}], T' = aT$ is solvable.

T is fund. matrix for $y' = ay$ (i.e., $\det(T) = T$).

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.t. $y' = nay$ has no sol. in $k^\times$.

$I \neq 0$ is diff. ideal of R exists.

so I is, $F = T^m + a_{m-1}T^{m-1} + \dots + a_0$ is in I . ($a_0 \neq 0$)

(n is min s.t. $y' = nay$ has no sol. in $k^\times$) $\perp$ poly exists, $T^{-1} \in R^\times$ is not.

$$\begin{aligned}
 F' &= mT^{m-1}T' + (m-1)a_{m-1}T^{m-2}T' + \dots + a_0' \\
 &= maT^m + ((m-1)a_{m-1} + a_{m-1}')T^{m-1} + \dots + a_0' \in I = (F).
 \end{aligned}$$

$\therefore F' = m a F$

$m > 0$ is fixed.

$F' = m a F$ is constant, $a_0' = m a a_0$ 矛盾 (⊙ (i) is fixed)

$\therefore m = 0 \quad \therefore I = R$.

(ii) $y' = ay$ is solvable

so $y' = ay$ has min sol. $y \in k^\times$.

Rem. $R = k[T, T^{-1}]$ is Picard-Vessiot ring exists.

⊙ $(T^n - y_0)$ is non-trivial diff. ideal exists.

i.e. R is simple exists.

Proof

$$(T^n - y_0)' = nT^{n-1}T' - y_0' = naT^n - ay_0 = na(T^n - y_0) \in (T^n - y_0)$$

$\therefore$ diff. ring $k[T, T^{-1}] / (T^n - y_0)$ exists.

can. proj. $\phi: k[T, T^{-1}] \rightarrow k[T, T^{-1}] / (T^n - y_0)$ is iso.

よ2 $k[T, T^{-1}] / (T^n - y_0)$ is $k[x, x^{-1}]$ exists.

$x^n = y_0 \quad (x(x^{n-1}y_0^{-1}) = 1 \leadsto x^{-1} = x^{n-1}y_0^{-1})$

$$t' = (\pi(T))' = \pi(T') = \pi(AT) = A\pi(T).$$

よ、 $\bar{R} := k[t, t^{-1}]$ の各元は $\sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$ の形に unique に書ける。

$0 \neq I \subset R \in \text{diff ideal}$ とする。

今、 $I \ni f = \sum_{i=0}^n a_i t^i \neq 0$ を含むような最小の d を考える。

$d > 0$ と仮定する。

$$A d = 1, a_0 \neq 0 \Rightarrow d \neq 0$$

$$f' = d t^{d-1} t' + a_{d-1} (d-1) t^{d-2} t' + \dots + a_0'$$

$$= d a t^d + ((d-1) A a_{d-1} + a_{d-1}') t^{d-1} + \dots + a_0' \in I = (f)$$

$$\therefore f' - d a f \in I$$

$$\therefore f' - d a f = 0 \quad (\odot \text{ degree を見る})$$

$$\therefore a_0' = d A a_0 \quad (\odot \text{ 定数項を見る}) \dots \text{矛盾} \quad (\odot n \text{ の最小性})$$

$$\therefore d = 0 \quad (\text{i.e. } \bar{R} = I)$$

よ、上より、 $y' = Ay$ の Picard-Vessiot ring は $\begin{cases} (i) R = k[t, t^{-1}] \\ (ii) \bar{R} = k[t, t^{-1}] / (t^n - y_0) \end{cases}$ とある。

Prop 1.20

$y' = Ay$ の Picard-Vessiot ring R は 同型を除く一意に存在する。

$$\text{さらに, } C_{\text{frac}}(R) = C_R = C_k$$

pf. (construction)

$$\begin{array}{ccc} \partial \subset k[X_{ij}, (\det)^{-1}] & \xrightarrow{\text{Spec}(-)} & GL_n \\ \uparrow & & \downarrow \\ \partial \subset k[X_{ij}] & & M_n \\ \uparrow & & \downarrow \\ \partial X = AX & & * \\ \uparrow & & \leftarrow \Gamma(-) \\ k & & \end{array}$$

ある max. diff ideal

$$\leadsto R := k[X_{ij}, (\det)^{-1}] / \mathfrak{m}$$

(uniqueness)

$R_1, R_2 \in \text{Picard-Vessiot ring for } y' = Ay$ とする。

$\exists$ diff. ring from $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ と仮定する。

R_1 の simple 性より、 φ は inj. とある。

$$R_1 = k[t_{ij}, \det^{-1}] \text{ とする } \Rightarrow \text{Im}(\varphi) = k[\varphi(t_{ij}), \det^{-1}] = R_2.$$

$\therefore \varphi$ は bij.

- 一般の場合、 $R_1 \rightarrow R_1 \otimes_k R_2 \leftarrow R_2$ より、 $R_1 \cong \varphi_1(R_1) = \varphi_2(R_2) \cong R_2$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 \searrow & \downarrow & \nearrow \varphi_2 \\ & R_1 \otimes_k R_2 / \mathfrak{m}_{R_1 \otimes_k R_2} & \end{array}$$

! $\odot$ fund. matrix 行列 $Y = U \cdot Z$

Def 1.21

$Y' = AY$ の Picard-Vessiot field K には, $Y' = AY$ の Picard-Vessiot ring の商体の $\simeq$.

Def

K : Picard-Vessiot field for $Y' = AY$

K/K : Picard-Vessiot extension for $Y' = AY$

$\Leftrightarrow \exists F = (f_{ij})$: fund. matrix s.t. $K = K(F_{ij})$ and $C_K = C_K$.

Prop 1.22

$Y' = AY$, $K/K \in \mathcal{A}L_2$, TFAE:

(i) K/K : Picard-Vessiot ext.

(ii) K/K : fund. matrix $\in \mathcal{A}L_2$ 含む最も小拡大

(iii) K/K : Picard-Vessiot field

pf. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) は明らか. $\square$

cf (i) $\Rightarrow$ (iii) は $\mathcal{A}L_2$ の $\Rightarrow$ 証明

Lem 1.23

K : diff. field w/ $C_K = C$.

$Y'_{ij} = 0 \in \mathcal{A}L_2$, $K[Y_{ij}, \det^{-1}] \in \text{diff. field}$ である.

$\{ \text{ideal of } C[Y_{ij}, \det^{-1}] \} \longrightarrow \{ \text{diff. ideal of } K[Y_{ij}, \det^{-1}] \} : \text{bij}$

$\downarrow$

$\longmapsto (I) := I \cdot K[Y_{ij}, \det^{-1}]$

$= \{ \sum_{i=0}^n \lambda_i C_i \mid \lambda_i \in K[Y_{ij}, \det^{-1}], n \geq 0, C_i \in I \}$

$J \cap C[Y_{ij}, \det^{-1}] \longleftarrow J$

pf. $K[Y] := K[Y_{ij}, \det^{-1}]$ である.

$\{ \mathcal{L}_s \}_{s \in S} \in C$ 上の K の basis である. ($\mathcal{L}_1 = 1 \in \mathcal{A}L_2$ である)

$\therefore$ かつ $\{ \mathcal{L}_s \}_{s \in S}$ は $C[Y]$ 上の $K[Y]$ の (module $\in \mathcal{A}L_2$ の) basis である.

$(I) = \{ \sum_{i=0}^n \lambda_i C_i \mid \lambda_i \in K[Y], C_i \in I, n \geq 0 \} \supset I$

今

$K[Y] = \bigoplus_{s \in S} \mathcal{L}_s C[Y], (I) = \bigoplus_{s \in S} \mathcal{L}_s I$

より

$(I) \cap C[Y] = \mathcal{L}_1 I = I$.

$J \supseteq J$: diff. ideal of $K[Y] \in \mathcal{A}L_2$, $I := J \cap C[Y]$ である.

以下 $J \neq I$ である $J = I$ である.

$C[Y] = \bigoplus_{\beta \in B} e_{\beta} C$ である。 J の元は $\sum_{\beta \in B} \lambda_{\beta} e_{\beta}$ ($\lambda_{\beta} \in K$) と書ける。

$\forall f = \sum_{\beta \in B} \lambda_{\beta} e_{\beta} \neq 0$, $\text{length}(f) := \#\{\beta \mid \lambda_{\beta} \neq 0\}$ に対して induction を示す。

(ETS: $f \in (I)$)

$\text{length}(f) = 0$ である。 $f = 0 \in (I)$ 。

$\text{length}(f) = 1$ である。 $f = \lambda_{\beta} e_{\beta} \in J$ である。 $\lambda_{\beta} f = e_{\beta} \in J \cap C[Y] =: I$ である。 $f \in (I)$ 。

また $f = \sum_{\beta \in B} \lambda_{\beta} e_{\beta}$ ($\lambda_{\beta_1} = 1, \lambda_{\beta_2} \in K \setminus C$) である。

$$f' = \sum_{\beta \in B} (\lambda'_{\beta} e_{\beta} + \lambda_{\beta} e_{\beta'}) = \sum_{\beta \in B} \lambda'_{\beta} e_{\beta} \quad \sim \quad \text{length}(f') < \text{length}(f)$$

$\oplus e_{\beta} \in C[Y]$ $\oplus \lambda'_{\beta} = 0$

induction の仮定より、 $f' \in (I)$ 。

したがって $(\lambda_{\beta_2}^{-1} f)' \in (I)$ 。

今 $(\lambda_{\beta_2}^{-1} f)' = (\lambda_{\beta_2}^{-1})' f + \lambda_{\beta_2}^{-1} f'$ である。 $(\lambda_{\beta_2}^{-1})' f \in (I)$ 。

$\therefore f \in (I)$ 。 $\square$

また、 K/k は Picard-Vessiot ext である。 $F \in \text{fund. matrix}$ である。

$(X_{ij})' = A X_{ij}$ である。 $X = (X_{ij}) \in \text{Mat}_n$, $k[X]$ は定数である。

また $X = F Y$ in $K[X]$ である。 $Y = (Y_{ij})_{ij}$ は定数である。

$$X' = F' Y + F Y' = A F Y + F Y' = A X + F Y' = X' + F Y'$$

$$\sim F Y' = 0$$

$$\sim Y' = 0 \quad (\oplus F \in GL_n(K))$$

$\hat{P} \in (P)$ は生成子である ($\oplus \vec{P} \in \text{Lem}$)

$$\begin{array}{ccc} C[Y] & \supset & \hat{P} = (P) \cap C[Y] \\ \cap & & \cap \end{array} \quad \text{である。}$$

$$\begin{array}{ccc} K[X] = K[Y] & \supset & (P) := P \cdot K[Y] \\ \cup & & \cup \end{array} \quad \begin{array}{l} K[Y]/(P) \cong K \otimes_k (K[X]/P) \neq 0 \text{ である。} \\ (P) \text{ は non-trivial diff. ideal である。} \end{array}$$

$$K[X] \supset P: \text{max. diff. ideal}$$

今、 $\hat{P}$ は含むような $C[Y]$ の max. ideal $\in \mathcal{M}$ である。 $C = \overline{C}^{\text{alg}}$ である。 $C[Y]/\mathcal{M} \cong C$ 。

$C[Y] \twoheadrightarrow C[Y]/\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} C$: $\text{hom} \in K[Y]$ である。 $\varphi: K[Y] \rightarrow K$ である。

(Rem. $K = C \otimes_k K$, $K[Y] = C[Y] \otimes_k K$)

である。 $(P) \in \text{Ker}(\varphi)$ 。 ($\oplus \hat{P} \in \mathcal{M}$)

$\psi := \varphi|_{K[Y]}: K[Y] \rightarrow K$ である。

$\text{Ker}(\psi) \supset P$ である。 P の最大性より、 $\text{Ker}(\psi) = P$ 。

$$\therefore k[x]/p \cong \psi(k[x])$$

p is max diff. ideal & $\psi(k[x])$ is Picard-Vessiot ring $\neq \emptyset$.

($\odot$ Prop 1.20 on construction)

$\Rightarrow$

$\odot \psi: k\text{-lin.}$

$$(\psi(x))' = \psi(x') = \psi(AX) = A\psi(x)$$

& $\psi(x)$ is fund. matrix for $y' = Ay$ $\neq \emptyset$.

$\therefore \exists D \in GL_n(C)$ s.t. $\psi(x) = FD$. ($\odot C_k = C (= C_k)$)

$$K = k(F) \text{ & } K = \text{frac}(k[x]).$$

$\therefore K$: Picard-Vessiot field. $\square$

§1.4 The differential Galois groups

Def 1.25

$(k, '): \text{diff. field}$

$\left[\begin{array}{l} \text{DE } y' = Ay / k \\ \text{or} \\ \text{diff. mod } / k \end{array} \right]$ の微分 Galois 群とは, $y' = Ay$ に対する Picard-Vessiot ring R

の微分 k -代数自己同型全体からなる群 $\text{Gal}(R/k)$ のことである:

$$\text{Gal}(R/k) := \{ \sigma: R \rightarrow R: \text{iso of } k\text{-alg} \mid \forall f \in R, \sigma(f)' = \sigma(f') \}$$

Rem. fin. Galois ext R/k は, k 上のある matrix DE の Picard-Vessiot ring である.
通常の Galois group は, diff. Galois group とおける.

Exercise 1.5.3

$(F, \partial): \text{diff. field}, \text{ch}(F) = 0.$

(a) $F(x): \text{rat. func. field}, a \in F(x)$ given

$\Rightarrow \exists \tilde{\partial}: F(x) \rightarrow F(x): \text{diff. s.t. } \tilde{\partial}(x) = a, \tilde{\partial}|_F = \partial.$

(b) $\hat{F}/F: \text{fin. ext} \Rightarrow \exists \tilde{\partial}: \hat{F} \rightarrow \hat{F}: \text{diff. s.t. } \tilde{\partial}|_F = \partial.$

pf. (a) まず $F[x]$ 上の微分を定め, そのあと局所化 $F(x)$ に延長すればよい

(b) $\hat{F} = F(a)$ のように F を $\hat{F}$ とおけばよい.

$f = \sum_{i=0}^n f_i x^i \in F[x]$ を, min. poly. of a とする.

$$F[x]/(f) \cong F(a) = \hat{F}$$

$\hat{F}$ に diff. を導入する.

f は separable $\Rightarrow \gcd(f, f') = 1.$

$$\exists \alpha, \beta \in F[x] \text{ s.t. } \alpha f + \beta f' = 1.$$

よって

$$\tilde{\partial}(x) := -\beta \sum_{i=0}^n \partial f_i \cdot x^i$$

と定めると, (f) は diff. ideal である.

$$\therefore \exists \tilde{\partial}: F[x]/(f) \rightarrow F[x]/(f): \text{diff. } \square$$

$$\text{ETS: } \tilde{\partial}(1/f) \in (f).$$

$$\text{ETS: } \tilde{\partial}(f) \in (f)$$

$$\tilde{\partial}(f) = \sum_{i=0}^n \partial f_i \cdot x^i$$

$$+ \sum_{i=0}^n f_i \cdot i x^{i-1} (-\beta \sum_{i=0}^n \partial f_i x^i)$$

$$= \sum_{i=0}^n \partial f_i \cdot x^i \cdot (1 - \beta f')$$

$$= \left(\sum_{i=0}^n \partial f_i \cdot x^i \right) \alpha f \in (f).$$

Exercise 1.24.1

$(k, '): \text{diff. field.}$

$C = C_k = \overline{C_k}^{\text{alg}}: \text{constant of } k,$

$k/k: \text{fin. Galois ext, } G = \text{Gal}(k/k).$

$\nexists (k, ') \nexists \text{diff. field } \neq \emptyset.$

$\Rightarrow k: \text{Picard-Vessiot ring}$

pf. Step 1 k is "simple" $\Rightarrow$ "there is a k field" $\Rightarrow$ "there is a k field".

Step 2. $\exists F = (F_{ij})_{ij} \in GL_n(k)$ s.t. $F' = BF \in \text{Mat}_n(k)$.

(a) $\forall \sigma \in G, \forall \alpha \in k, \sigma(\alpha') = \sigma'(\alpha)$ $\Rightarrow$ "show".

$\partial: k \rightarrow k \in \text{Mat}_n(k), \partial(\alpha) := \sigma^{-1}(\sigma'(\alpha))$ $\Rightarrow$ "define ∂ and it is diff. $\neq \emptyset$."

k is a differential field, ∂ is a derivation.

$$\partial(\alpha) = \alpha' \leadsto \alpha' = \sigma^{-1}(\sigma'(\alpha)) \leadsto \sigma(\alpha') = \sigma'(\alpha).$$

(b) $k = k[x_1, \dots, x_m]$ $\Rightarrow$ "there is a k field" $\Rightarrow$ "there is a k field" $\Rightarrow$ "there is a k field".

$V := \langle x_1, \dots, x_m \rangle_C \subset k$ $\Rightarrow$ "show", $\forall \sigma \in G, \sigma(V) = V$

番号 $\in \{1, \dots, m\}$ $\Rightarrow$ "show", $x_1, \dots, x_n \in V$ $\Rightarrow$ "show". ($n \leq m$)

又 $V := \langle x_1, \dots, x_n \rangle_C \subset k$ $\Rightarrow$ "show", $\text{wronskian} \in W = W(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

$\Rightarrow$ "show", $\text{wronskian}(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \Rightarrow$ "show". ($\odot$ Lem 1.12) $\leftarrow C_k = C$ $\Rightarrow$ "use it" $\Rightarrow$ "note".

今, $B := W'W^{-1} \in \text{Mat}_n(k)$ $\Rightarrow$ "show", $\forall \sigma \in G, \sigma(B) = B$ $\Rightarrow$ "show".

$$\sigma(B) = \sigma(W')\sigma(W^{-1}) = \sigma'(W)\sigma(W)^{-1} = W'A\sigma \cdot (WA\sigma)^{-1} = B.$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma(V) = V \text{ 也 } \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma(x_1) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \sigma(x_n) = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{array} \right. \end{array} \right. \leadsto \begin{array}{l} [\sigma(x_1) \dots \sigma(x_n)] = [x_1 \dots x_n] A\sigma \\ \therefore \sigma W = W A\sigma \end{array}$$

$\therefore B \in M_n(k)$.

また W is fund. matrix for $y' = By$ ($B \in M_n(k)$) $\Rightarrow$ "show".

Step 3 $k = k[\{F_{ij}\}]$, $(\det F)^{-1} \in k$.

$$k[\{W_{ij}\}], (\det W)^{-1} = k(x_1, \dots, x_n) = k. \quad \square$$

observation 1.26

$(k, '): \text{diff. field}, \mathcal{M}: \text{diff. } k\text{-mod.}$

$\mathcal{Y}' = A\mathcal{Y} : \mathcal{M} \text{ の basis } e_1, \dots, e_n \in \text{fix } L^2 \text{ に対する DE.}$

$R/k : \text{Picard-Vessiot ext (i.e. } R\text{-Picard-Vessiot ring)}$

$F : \text{fund. matrix for } \mathcal{Y}' = A\mathcal{Y} \leadsto R = k[\{F_{ij}\}, (\det F)^{-1}]$

Exercise 1.16

(1) $\mathcal{Y}' = A\mathcal{Y}, \mathcal{F}' = \hat{A}\mathcal{F} : \text{matrix DEs ass. w/ } \mathcal{M} \leftarrow \dim(\mathcal{M}) = n \text{ である.}$

$R : \text{diff. ring}$

$R : \text{Picard-Vessiot ring for } \mathcal{Y}' = A\mathcal{Y} \Leftrightarrow R : \text{Picard-Vessiot ring for } \mathcal{F}' = \hat{A}\mathcal{F}.$

(2) $\mathcal{M}$ に関する k 上の Picard-Vessiot ring の def は, 次の 3 つの条件を満す $\leadsto$ である:

(i) $R : \text{simple diff. ring}$

(ii) $V := \text{Ker}(\partial : R \otimes_k \mathcal{M} \rightarrow R \otimes_k \mathcal{M}) : \mathbb{C}\text{-vect sp. of dim } n.$

(iii) $\mathcal{M} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_k \leadsto$ である $\leadsto, R = k[\{r_{x,i} \mid x \in V, i = 1, \dots, n\}].$

ただし, $x = r_{x,1} \otimes e_1 + \dots + r_{x,n} \otimes e_n. (r_{x,i} \in R)$

Rem. $R \otimes_k \mathcal{M}$ の微分は次で定まる:

$$\partial(r \otimes m) := r' \otimes m + r \otimes m'$$

$V := \text{Ker}(\partial : R \otimes_k \mathcal{M} \rightarrow R \otimes_k \mathcal{M})$ とおくと, V は $\mathbb{C}$ -vect sp of dim n .

$V = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{\mathbb{C}}$ である.

(1) $G := \text{Gal}(R/k)$ は, 以下明示的に書ける.

R 上の G の k -lin. 作用は, $R \otimes_k \mathcal{M}$ 上の k -lin. 作用に拡張される.

$\forall \sigma \in G$ に対し, $\hat{\sigma}$ は次で定まる:

$$\hat{\sigma}(r \otimes m) := \sigma(r) \otimes m \quad (\forall r \otimes m \in R \otimes_k \mathcal{M})$$

$\hat{\sigma}$ は $R \otimes_k \mathcal{M}$ 上の微分と可換である (証明略)

また $\hat{\sigma}(V) = V$ であり, V 上の $\mathbb{C}$ -lin. 作用を制限する.

$$(\odot \forall x \in V \leadsto \text{ある} \leadsto, \hat{\sigma}(x)' = \hat{\sigma}(x') = \hat{\sigma}(0) = 0.)$$

以上より, $G \rightarrow GL(V), \sigma \mapsto \hat{\sigma}|_V$ が得られた.

これは inj. である

$1 \otimes e_i \in e_i$ と略記

($\odot \hat{\sigma}|_V = \text{id}_V$ である. (ETS: $\sigma = \text{id}_R$)

$$\begin{aligned} [x_1 \dots x_n] &= [\hat{\sigma}(x_1) \dots \hat{\sigma}(x_n)] = [\hat{\sigma}(e_1) \dots \hat{\sigma}(e_n)] \sigma(F) = [e_1 \dots e_n] \sigma(F) \\ [x_1 \dots x_n] &= [e_1 \dots e_n] F \text{ であるから, } F = \sigma(F). \end{aligned}$$

$$(R = k[X_{ij}], (\det F)^{-1}] \text{ s.t. } \sigma = \text{id}_R.)$$

(2) (1) は matrix DE の解を "と書ける":

$$F' = AF, A \in M_n(k) \Rightarrow \sigma(F)' = A\sigma(F). \text{ (i.e. } \sigma(F) \text{ : fund. matrix for } y' = Ay)$$

$$\therefore \exists C_\sigma \in GL_n(C) \text{ s.t. } \sigma F = F \cdot C_\sigma$$

$\therefore \sigma \mapsto C_\sigma : G \rightarrow GL_n(C), \sigma \mapsto C_\sigma$ は inj hom "と書ける".

(3) $L = \text{frac}(R)$ とおく.

$\sigma \in G = \text{Gal}(R/k)$ は, $\hat{\sigma} \in \text{Gal}(L/k)$ に unique 対応する.

$$(\hat{\sigma}(\frac{r_2}{r_1}) := \frac{\sigma(r_2)}{\sigma(r_1)}, \hat{\sigma}(\frac{r_2}{r_1})' = \hat{\sigma}((\frac{r_2}{r_1})').)$$

$\therefore \sigma \mapsto \hat{\sigma} : \text{Gal}(R/k) \rightarrow \text{Gal}(L/k), \sigma \mapsto \hat{\sigma}$ は iso "と書ける".

($\odot$) inj. hom は明らか.

$\sigma \in \text{Gal}(L/k)$ は, $V_L := \text{Ker}(\partial : L \otimes_k \mathcal{M} \rightarrow L \otimes_k \mathcal{M})$ に作用する.

$\therefore \sigma \mapsto V_L = V$ "と書ける". ($\odot$ Lem 1.8)

Thm 1.27

$y' = Ay$: DE of degree n/k .

$L \supset k$: Picard-Vessiot field.

$G = \text{Gal}(L/k) (\hookrightarrow GL_n(C))$

(1) G : (lin) alg grp.

(2) $\text{Lie}(G) \cong \{ D : L \rightarrow L : \text{der.}/k \mid D(f') = (Df)' \}$.

(3) $L^G = k$.

Rem. $G \subset GL_n(C)$: alg. grp : $\Leftrightarrow G$: Zariski-closed

$$\Leftrightarrow \exists (f_s) \in C[X_{ij}] \text{ s.t. } (C_{ij}) \in G \Leftrightarrow f_s(C_{ij}) = 0 \ (\forall s)$$

pf. (1) $L = \text{frac}(R), R = R_0/\pi, R_0 = k[X_{ij}, \det^{-1}], X' = AX$ とする.

$\forall M \in GL_n(C)$ は π の逆像, $\pi^{-1}(M)$ 成り立つ:

$$M \in G \Leftrightarrow k\text{-autom. } \sigma_M : R_0 \rightarrow R_0 \text{ s.t. } X \mapsto XM$$

は k -autom. $R \rightarrow R$ として存在する.

$$\Leftrightarrow \sigma_M(\pi) \subset \pi.$$

R_0 の C -basis を f_i とする.

σ_M は, M の成分と $\det^{-1}$ を係数とするような poly. を成分とするような行列 "と書ける".

より, 条件 $\sigma_M(\pi) \subset \pi$ は, σ_M の表現行列を用いた一次系集合 "と書ける".

< 31 proof >

$$G < GL_n(C) \Leftrightarrow G = \{ (C_{ij}) \in GL_n(C) \mid f_s(C_{ij}) = 0 \ (\forall s) \} \quad (\exists (f_s)).$$

= 0 なる f_{ij}

$$GL_n(C) \xrightarrow{1:1} \{ \text{max ideal of } C[Y_{ij}, \det^{-1}] \}$$

$$(C_{ij}) \mapsto \text{Ker}(C[Y_{ij}, \det^{-1}] \rightarrow C, Y_{ij} \mapsto C_{ij})$$

は: 次 $f_{ij} \in \mathbb{C} \mid \exists f \neq 0$:

$$G \xrightarrow{1:1} \{ \text{max ideal of } C[Y_{ij}, \det^{-1}] / I \} \quad I = \sqrt{\langle \{ f_s \} \rangle} : \text{ideal}$$

$GL_n(C)$ の gr. str. は, $C[Y_{ij}, \det^{-1}]$ の Haff alg. str. に射影する.

$G < GL_n(C)$: subgr. ず, $C[Y_{ij}, \det^{-1}] / I$ は quotient Haff alg. ず.

$$\forall B: C\text{-alg} \text{ に対し, } GL_n(B) \cong \text{Hom}_{C\text{-alg.}}(C[Y_{ij}, \det^{-1}], B) \text{ である.}$$

$$g(B) := \text{Hom}_{C\text{-alg.}}(C[Y_{ij}, \det^{-1}] / I, B)$$

$g(C) \cong G$ なる functor $g: C\text{-alg.} \rightarrow \text{Grp}$ 得られる.

逆に, ある $U = U_0 / I$ を表現する functor $g: C\text{-alg.} \rightarrow \text{Grp}$ st. $g(C) \cong G$

が存在すれば, $G < GL_n(C)$ は alg. subgr. である.

(Rem. 果た, = 0 なる I は radical ideal である. (Cartier's Thm))

と $\mathbb{C}$ を踏まえ, functor $g: C\text{-alg.} \rightarrow \text{Grp}$ を, 次で定める:

$$g(B) := \text{DiffAct}(R \otimes_C B / k \otimes_C B)$$

$$g(C) = G \text{ かつ } k.$$

g は ある $U = U_0 / I$ を表現する.

① $U_0 := C[Y_{ij}, \det^{-1}]$, $\mathcal{M}_0 := (Y_{ij}) \in GL_n(U_0)$ とする.

$R = R_0 / \mathfrak{m}$ の C -basis $(e_i) \in \mathbb{C}$ かつ $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_{ij})$ とする.

$\mathcal{M}_0: R_0 \otimes U_0 \rightarrow R_0 \otimes U_0$ に対し $\uparrow$ 並列元

$$\mathcal{M}_0(\mathfrak{m}_{ij}) \bmod \mathfrak{m} = \sum_i e_i \otimes C(\mathcal{M}_0, i, j)$$

と $\mathbb{C}$

$$I := \langle C(\mathcal{M}_0, i, j) \mid i, j \rangle$$

とすれば, $U = U_0 / I$ は g を表現する.

(2) $\text{Lie}(G) := \{D \in M_n(C) \mid I_n + \varepsilon D \in G(C[\varepsilon])\}$ である。

k -autom.

$$\Leftrightarrow C[\varepsilon] := C \oplus C\varepsilon \text{ w/ } \varepsilon^2 = 0.$$

$$I_n + \varepsilon D \in G(C[\varepsilon]) \Leftrightarrow \sigma_{I_n + \varepsilon D} : R_0[\varepsilon] \rightarrow R_0[\varepsilon] \text{ induces } R[\varepsilon] \rightarrow R[\varepsilon].$$

$$(1) \text{ 同様 } \uparrow \text{ s.t. } (X_{ij}) \mapsto (X_{ij})(I_n + \varepsilon D)$$

$$\Leftrightarrow (X_{ij}) \mapsto (X_{ij})D \text{ induces a } k\text{-der on } R$$

R -der. は $L = \text{frac}(R)$ 上 $\neq 0$ である。

(3) $d = \frac{b}{c} \in L \setminus k$ ($b, c \in R \setminus 0$) である。 (ETS: $\exists \sigma \in G$ s.t. $\sigma(a) \neq a$)

$b \otimes c \neq c \otimes b$ in $R \otimes_k R$ である。

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \exists \varphi : R \rightarrow k : k\text{-lin. s.t. } \varphi(b) = 0 \neq \varphi(c). \\ \leadsto \varphi \otimes \text{id}_R : R \otimes_k R \rightarrow R, \quad b \otimes c \mapsto 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad c \otimes b \mapsto \varphi(c)b \neq 0 \end{array} \right)$$

$$d := b \otimes c - c \otimes b (\neq 0) \in R \otimes_k R \text{ である。}$$

Lem A.16

R_1, R_2 : reduced k -alg, k : perfect $\Rightarrow R_1 \otimes_k R_2$: reduced

よ、 d は non-nilpotent である。

$$\therefore (R \otimes_k R)[\frac{1}{d}] \neq 0.$$

$J \subset (R \otimes_k R)[\frac{1}{d}]$: max. diff. ideal である。

2つの異なる map $\phi_1, \phi_2 : R \rightarrow N := (R \otimes_k R[\frac{1}{d}]) / J$ である。

Prop 1.20 の proof により $\phi_1(R) = \phi_2(R)$ 。

$$\sigma := \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : R \rightarrow R \text{ である。 } \sigma \in G.$$

今 $R \otimes_k R \rightarrow N$ $\swarrow$ R は simple であり ϕ_2 は inj.

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_k R & \rightarrow & N \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ d & \mapsto & \phi_1(b)\phi_2(c) - \phi_1(c)\phi_2(b) = \phi_2(\sigma(b)c - \sigma(c)b) \neq 0 \end{array}$$

$$\text{よ、 } \sigma(b)c \neq \sigma(c)b.$$

$$\therefore \sigma\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c}. \quad \square$$

$\mathcal{Z}$: G -torsor / k

$\Leftrightarrow \mathcal{Z}$: affine var. / k w/ G -action

Thm 1.28 proof の冒頭を。

Thm の仮定の $\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z} := \{\text{max ideal of } R\}$ は G -torsor / k

$$\text{pf. } \mathcal{Z} = \{\text{max ideal of } R\} \subset GL_n, k = \{\text{max ideal of } R_0\}$$

$$G = \{g \in GL_n, C \mid \mathcal{Z}g = \mathcal{Z}\}$$

GL_n, k の乗法は, mod of k -affine var. $M: \mathcal{Z} \times_C G \rightarrow \mathcal{Z}$ である。
 $(\mathcal{Z}, g) \mapsto \mathcal{Z}g$

$\Rightarrow$ $\mathbb{A}^1$ is G -action is trivial.

Claim

$m: \mathbb{A}^1 \times_C G \rightarrow \mathbb{A}^1 \times_k \mathbb{A}^1 : \text{iso of } k\text{-affine var.}$
 $(z, g) \mapsto (zg, z)$

$G_k := G \otimes_C k$ is alg. grp / k , G_k の標準関数は $C[G] \otimes_C k$ である.

$$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{A}^1 \times_C G = \mathbb{A}^1 \times_k G_k$$

今 $z \in G_k$ は $\text{Alg. grp of } G_{L/k}$ である. $G_k \ni z$.

$\Rightarrow z$, 次は注意する:

" $z: G$ -torsor" $\Leftrightarrow$ " $z \in G_{L/k}$ は G_k の右剰余類"

(i) z is k -rat. pt. $P \in \mathbb{A}^1 \times_k \mathbb{A}^1$

$$z: G\text{-torsor} \Leftrightarrow z = P \cdot G_k$$

(ii) 一般に, $z \in G_{L/k} \hookrightarrow G_{L/C}$ に対して, z is G -torsor

$\Leftrightarrow \exists F/k$ s.t. $z_F := z \otimes_k F$ は $G_{L,F}$ における $G_F = G \otimes_C F$ の右剰余類

Claim

$z_L = z \otimes_k L$ is $G_L = G \otimes_C L \subset G_{L,L}$ の右剰余類.

$R_0 \rightarrow R = R_0/\mathfrak{m} \subset L$ と置く.

$$X_{ij} \mapsto S_{ij}$$

X_{ij} を忘れた, L の外に X を置く.

$\det(X) \neq 0$ として, $S = (S_{ij}) \in G_{L,L}$. X, Y は不定元と思う.

$X = SY$ として, $Y = (Y_{ij})$ を定める.

$$R_0 = k[X_{ij}, \det^{-1}] \subset L[X_{ij}, \det^{-1}] = L[Y_{ij}, \det^{-1}] \supset C[Y_{ij}, \det^{-1}]$$

$\uparrow$ $\det$ は $\neq 0$.

L の作用として, $G = \text{Gal}(L/k)$ の作用が定まるが, R_0 上は trivial に作用する.

$\forall \sigma \in \text{Gal}(L/k) \ni \sigma S = S\mathcal{M}$ となる $\mathcal{M} \in G = \mathcal{G}(C) \leq G_L(C)$ が存在する.

$\Rightarrow \exists \sigma, \sigma Y = \mathcal{M}^{-1} Y$ となる.

$$\left(\begin{array}{l} \odot SY = X = \sigma X = \sigma(SY) = \sigma(S)\sigma(Y) = S\mathcal{M}\sigma(Y) \\ \therefore Y = \mathcal{M}(\sigma Y) \end{array} \right)$$

$G \ni C[Y_{ij}, \det^{-1}] \leadsto G$

Lem 1.29

$\{ \text{ideal of } R_0 \} \rightarrow \{ G\text{-inv. ideal of } L[X_{ij}, \det^{-1}] \} : \text{by}$
 $I \mapsto (I)$

Lem 1.23 と合致せよ

$\{ \text{diff. ideal } k[X_{ij}, \det^{-1}] \} \longrightarrow \{ G\text{-inv. ideal of } C[Y_{ij}, \det^{-1}] \}$ bij.
 特異点, max diff ideal $\mapsto$ max G -inv. diff. ideal.

特異点, $r := \mathcal{M}_L[Y_{ij}, \det^{-1}] \cap C[Y_{ij}, \det^{-1}]$ は max G -inv. ideal of $C[Y_{ij}, \det^{-1}]$ である。

また, W : zero set of r は G -inv. minimal.

つまり, $I = I_W \in W$

$$\left(\begin{array}{l} \textcircled{1} \mathcal{M} \subset (\{X_{ij} - s_{ij}\}) = (\{Y_{ij} - \delta_{ij}\}) \subset L[X_{ij}, \det^{-1}] \\ (\{Y_{ij} - \delta_{ij}\}) \cap C[Y_{ij}, \det^{-1}] \text{ は, } \{I\} \subset \mathcal{G}_L(C) \text{ に属する。} \end{array} \right)$$

$\therefore W = G$.

よって, 次のように:

$$L \otimes_k R = L \otimes_k (k[X_{ij}, \det^{-1}] / \mathcal{M}) \cong L \otimes_C (C[Y_{ij}, \det^{-1}] / r)$$

$\therefore \mathcal{Z}_L = \mathcal{S}_L$ ($\textcircled{1}$ max ideal of $- \{ \in \mathcal{Z} \}$, $X = \mathcal{S}_Y$ に注意する) $\square$

(proof of Lem 1.29)

$J \subset L[X_{ij}, \det^{-1}]$: G -inv. ideal $\in \mathcal{Z}$, $I := J \cap k[X_{ij}, \det^{-1}]$ とする。

$\{e_a\}_{a \in A} \in k$ -basis of R_0 とする。

$f \in J$ は, unique $f = \sum_{a \in A} l_a e_a$ ($l_a \in L^A$) と書ける。

$\text{length}(f) = \#\{a \in A \mid l_a \neq 0\}$ による induction である。

ETS: $f \in (I)$.

$\text{length}(f) = 0$ のとき, $f = 0 \in I$.

$\text{length}(f) = 1$ のとき, $f = l e$ とす。

$$e = l^{-1} f \in J, e \in J \cap k[X_{ij}, \det^{-1}] = I$$

よって, $f \in (I)$

$\text{length}(f) > 1$ のとき, L^* による induction である, $l_{a_1} = 1$ とし。

$\forall a \in A: a \neq a_1, l_a \in k$ かつ $0 \neq k$ かつ $0 \neq k$ かつ $l_{a_2} \in k$ とする。

$$\exists \sigma \in G = \text{Gal}(L/k) \text{ s.t. } \text{length}(\sigma(f) - f) < \text{length}(f).$$

induction の仮定より, $\sigma(f) - f \in (I)$.

Thm 1.27(3) より, $\exists \sigma \in G$ s.t. $\sigma(l_{a_2}) \neq l_{a_2}$.

上と同様に, 次のように:

$$(I) \ni \sigma(\lambda_2^{-1}f) - \lambda_2^{-1}f = \sigma(\lambda_2^{-1}f) - \sigma(\lambda_2^{-1})f + \sigma(\lambda_2^{-1})f - \lambda_2^{-1}f \\ = \sigma(\lambda_2^{-1})(\sigma(f) - f) + (\sigma(\lambda_2^{-1}) - \lambda_2^{-1})f \\ \therefore f \in (I) \quad \square$$

Cor 1.30

R : Picard-Vessiot ring for $y' = Ay$.

$Z = \text{Spec}(R)$, $L = \text{frac}(R)$, $G = \text{Gal}(R/k)$, $C[G]$: G の関数環

(1) $\exists \hat{k}/k$: fin. ext s.t. $Z_{\hat{k}} \cong G_{\hat{k}} (= G \times_c \hat{k})$

(2) Z : smooth connected.

(3) $\text{tr.deg}(L/k) = \dim(G)$.

(4) $\forall H < G$: subgroup, $L^H = k \iff H^{\text{-rat}} = G$.

Def
 X : sch. / k
 X : smooth
 $\iff \begin{cases} (i) k \text{ 上 局所有限型} \\ (ii) \Omega_{X/k}^1: \text{loc. free} \end{cases}$

pf (1) Z : G_k torsor $\Rightarrow \lambda$, $\mu: Z \times_c G_k \rightarrow Z$, $(z, g) \mapsto zg$ あり得る.

($\exists \lambda \in Z$ 示さず. 単に $\exists \lambda \in Z$ 示さず.)
 $(\mu, \text{pr}_1): Z \times_c G_k \rightarrow Z \times Z$, $(z, g) \mapsto (zg, z) : \text{iso}$

Claim $\leftarrow \lambda/k$: fin. ext.

$\exists B \in Z(\lambda)$ (λ -rat. pt.) $\Rightarrow Z_{\lambda} = G_{\lambda}$

($\odot G_{\lambda} \hookrightarrow \{B\} \times G_{\lambda} \not\cong Z_{\lambda}$ $\forall$ iso $\exists$ する.
 実際, $Z_{\lambda} \rightarrow Z_{\lambda} \times Z_{\lambda} \xleftarrow{\cong} Z_{\lambda} \times_{\lambda} G_{\lambda} \xrightarrow{\text{pr}_1} G_{\lambda}$ $\forall$ 同射 $\exists$ する.
 $t \mapsto (t, B)$)

R は $\forall g, k$ -alg. $\forall$, $Z(\bar{k}) \neq \text{empty}$. ($\odot$ Hilbert の零点定理)

$B \in Z(\bar{k}) \exists z \exists$.

$\exists \hat{k}/k$: fin. ext s.t. B : def / $\hat{k}$

$B \in Z(\hat{k}) \forall$, Claim $\Rightarrow Z_{\hat{k}} \cong G_{\hat{k}}$

(2) Prop 1.17 $\forall$ R は ID $\Rightarrow \text{Spec}(R)$ は connected $\Rightarrow$ あり.

(Rem. $\{ \text{closed subset of } \text{Spec}(A) \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{nilpotent elements of } A \}$)

Fact (fpqc descent)

$f: Y \rightarrow X$: flat, faithful, quasi-cpt.

$X' \xrightarrow{f'} Y'$

$\downarrow \quad \downarrow$, f' : smooth $\Rightarrow f$: smooth

$X \xrightarrow{f} Y$

$\therefore \text{Fact } \exists, \mathcal{Z}_{\hat{k}} \rightarrow \text{Spec}(\hat{k})$ に適用する

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ \mathcal{Z} & \rightarrow & \text{Spec}(k) \end{array}$$

$G_{\hat{k}}$ は alg. grp / $\hat{k}$ の smooth である。 (Cartier's Thm)

(1) $\mathcal{Z}_{\hat{k}} \not\subseteq \text{smooth} / \hat{k}$ である。 Fact $\mathcal{Z} \not\subseteq \text{smooth} / k$.

(3) Fact

A : f.g. k -alg, $B \supset A$: fin-type, integral. $\Rightarrow \dim(B) = \dim(A)$.

特に (Noether の正規化定理より) A の ID なら, $\text{tr.deg}_k(\text{frac}(A)) = \dim(A)$.

$$\text{tr.deg}_k(L) = \underset{\uparrow \text{Fact}}{\dim(R)} = \underset{\uparrow \text{Fact}}{\dim(R \otimes_k \hat{k})} = \dim(\mathcal{Z}_{\hat{k}}) \underset{\uparrow (1)}{=} \dim(G_{\hat{k}}) \underset{\uparrow \text{Fact}}{=} \dim(G) = \dim(G).$$

(4) $\Leftarrow$ Thm 1.27 より, $L^G = k$.

$\therefore \text{ETS}: L^H = L^{\bar{H}} \ (\forall H < G: \text{subgrp})$

$L^H \supset L^{\bar{H}}$ は ok.

$G \curvearrowright L$ より, $G \times_{\mathbb{C}} \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(L)$ 上の $\mathbb{C}$ -スキーム $\mathcal{Z}$ がある。

$\Rightarrow$ $\mathcal{Z}$ は L 上の mor. of ring $\mu: L \rightarrow \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} L$ がある。

$\forall \varphi \in L^H$ である。

ETS: $\text{stab}(\varphi)$: Zariski-closed.

$\forall g \in G$ である, g は $\mathcal{Z}$ 上の $\text{ev}_g: \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ である。

$$g \in \text{stab}(\varphi) \Leftrightarrow g \cdot \varphi = \varphi$$

$$\Leftrightarrow L \not\subseteq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}} L \xrightarrow{\text{ev}_g} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} L \text{ 上, } \varphi \text{ は } \varphi \text{ へ移動する. } - (*)$$

$\{ \varphi_{\lambda} \}_{\lambda}: \mathbb{C}$ -basis of L である, $\varphi_{\lambda_0} = \varphi$ である。

$$\therefore \text{ETS } \mu(\varphi) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \otimes \varphi_{\lambda} \text{ である}$$

$$\text{ev}_g \circ \mu(\varphi) = \sum_{\lambda} a_{\lambda}(g) \varphi_{\lambda}$$

より, φ は $\mathcal{Z}$ 上にある。

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{\lambda} a_{\lambda}(g) \varphi_{\lambda} = \varphi \Leftrightarrow \underbrace{a_{\lambda_0} = 1, a_{\lambda} \in \ker(\text{ev}_g)}_{\text{= } \varphi \text{ は } \text{stab}(\varphi) \text{ である ideal}}$$

$$\Rightarrow L^H = L^{\bar{H}} \text{ より, } H = \bar{H}.$$

すなわち H は G の $\mathbb{C}$ -スキーム $\mathcal{Z}$ 上にある。

Fact
 G : lin. alg. grp, H : alg. subgroup of G .

$\Rightarrow \exists G/H$: quasi-proj. var, $\exists \pi: G \rightarrow G/H$ s.t. $G/H(C) \cong G(C)/H(C)$ as grp.

Fact
 A : reduced ring, $p_1, \dots, p_r$: min. prime ideal of A s.t. $\bigcap_{i=1}^r p_i = 0$.

$$Q(A) \cong \prod_{i=1}^r \text{frac}(A/p_i)$$

↑ 全商環 ((non-zero div. of A 全体) $^{-1}$ A の $\subset$)

$L^H = k$ とする.

$$\begin{aligned} \hat{k} = L^H \otimes_k \hat{k} &\cong L^{\otimes k} \otimes_k \hat{k} \cong (L \otimes_k \hat{k})^{\otimes k} = (Q(R \otimes_k \hat{k}))^{\otimes k} \\ &\cong (Q(C[G] \otimes_C \hat{k}))^{\otimes k} \quad (\text{Fact}) \\ &\cong Q(C[G])^H \otimes_C \hat{k} \end{aligned}$$

$$H \times_k \text{Spec}(L) = H \times_C \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(L)$$

$$\therefore Q(C[G])^H = C. \quad (*)$$

$\pi: G \rightarrow G/H$ is mor. of alg. grp is, $\pi^*: Q(C[G/H]) \rightarrow Q(C[G]) \cong C$ s.t. $\pi^* = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} Q(C[G/H]) & \xrightarrow{\pi^*} & Q(C[G]) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & Q(C[G])^H \end{array} \quad \text{factorization.}$$

⊙ $\varphi \in Q(C[G/H])$ とする.

$\exists U \subset G/H$: open s.t. $\varphi \in P(U, \mathcal{O}_{G/H})$.

$\forall g \in G(C), \forall h \in H(C)$ に対して成立する:

$$(\pi^*(\varphi))(g) = \varphi \circ \pi(g) = \varphi(gH) = \varphi(ghH) = \pi^*(\varphi)(gh).$$

$\therefore \pi^*(\varphi): H$ -inv.

↑ Fact

(*) より, $Q(C[G/H]) \subset C$.

$$\therefore Q(C[G/H]) = C.$$

$G/H = X_1 \cup \dots \cup X_r$: irr. decomp. とする. Fact より, $Q(C[G/H]) = \prod_{i=1}^r C(X_i)$.

$$\therefore \dim(X_i) = 0, \quad r=1.$$

$$\therefore G = H. \quad \square$$

Prop 1.34

$(k, '): \text{diff. field}$,

$L: \text{Picard-Vessiot field for } y' = Ay \text{ } (A \in M_n(k)),$

$G = \text{Gal}(L/k)$

$\mathcal{A} := \{ H \subset G : \text{closed subgroup} \}$.

$\mathcal{L} := \{ M \subset L : \text{diff. subfield s.t. } k \subset M \}$.

(0) $H \in \mathcal{A} \Rightarrow \alpha(H) := L^H \in \mathcal{L}$.

$M \in \mathcal{L} \Rightarrow \beta(M) := \text{Gal}(L/M) \in \mathcal{A}$

i.e. $\mathcal{A} \xleftrightarrow{\beta} \mathcal{L} : \text{well-def.}$

(1) $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\mathcal{L}}, \beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathcal{A}}$

(2) $H \in \mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{L}^2$, 次の条件を満たす:

(i) $H \triangleleft G \Leftrightarrow \alpha(H) = L^H : G\text{-INV.}$

(ii) $H \triangleleft G \subseteq L^2, M := L^H \subseteq k^{\text{alg}}$.

• $M: \text{Picard-Vessiot field for some diff. eq. / } k$.

• $\gamma_M: G \rightarrow \text{Gal}(M/k) : \text{surj.}$
 $\sigma \mapsto \sigma|_M$

• $\text{Ker}(\gamma_M) = H$.

(3) G^0 : identity component of G

• L^{G^0}/k : fin. Gal ext, $\text{Gal}(L^{G^0}/k) = G/G^0$

• $L^{G^0} = \{ u \in L : \text{alg. / } k \}$ (i.e. L^{G^0} : alg. closure of k in L)

Pf. (0) $H \in \mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{L}^2, L^H$ is diff. subfield of L . $\therefore \alpha(H) \in \mathcal{L}$.

$M \in \mathcal{L} \nsubseteq \mathcal{L}^2, L$ is Picard-Vessiot field for $y' = Ay / M$ である.

$\nexists \beta(M) = \text{Gal}(L/M) \subset G$: closed. ($\odot$ Thm 1.27 (i) $\text{Gal}(L/M) \subset G_{\text{Ln}(C)}$: closed)

$\therefore \beta(M) \in \mathcal{A}$.

(1) $L/M \models \text{Thm 1.27 (3)} \exists H_1 \subseteq G, L^{\text{Gal}(L/M)} = M$. (i.e. $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\mathcal{L}}$)

$H \in \mathcal{A} \nsubseteq \mathcal{L}^2, H_1 := \text{Gal}(L/L^H) = \beta \circ \alpha(H) \subseteq G$.

$H \subset H_1$, $L^H = L^{H_1}$ (Cor 1.30(4) より, $H = \overline{H} = H_1$).

(2) $H \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^2$.

(i) $\Leftarrow M := L^H \subseteq k^{\text{alg}}, \forall \tau \in G \nsubseteq \mathcal{L}^2 \tau M = M$ である.

Claim
 $\text{Ker}(\tau_K) = H.$ $\leftarrow \text{Ker}(\tau_K) \triangleleft G$ かつ $H \triangleleft G$ かつ 従ふ.

$\supset$ ok

$\subset \sigma|_K = \text{id}_K$ かつ $\exists \sigma \in G$ かつ $\exists \tau \in \text{Gal}(L/K) = \text{Gal}(L/L^H) \stackrel{(1)}{=} H.$

$$\Rightarrow H = \beta(K) = \beta(\tau(K)) = \text{Gal}(L/\tau(K)) = \tau H \tau^{-1}$$

$\uparrow$ 固定 (Rem. $\Leftarrow \tau \equiv \text{id}$ かつ $\tau \in H$)

(ii) Cor 1.40 2" 示す.

Claim

$\forall \psi: K = L^H \hookrightarrow L: \text{diff. } k\text{-alg. hom.}, \exists \tilde{\psi}: L \rightarrow L: \text{diff. } k\text{-alg. autom.}$
 $\text{s.t. } \tilde{\psi}|_K = \psi.$

L は Picard-Vessiot field for $y' = Ay / K, \psi(K)$ かつ ψ の fund. matrix $\in L$ かつ $X = (X_{ij}), Y = (Y_{ij}) \in \text{GL}_n(L)$ かつ $\exists$.

$$\psi(\{X_{ij}\}) = L = \psi(K)(\{Y_{ij}\}).$$

$\therefore \text{"}$
 $L \xrightarrow{\text{id}} L \xrightarrow{\psi} L$ uniqueness of Picard-Vessiot ext

$$\text{id} \uparrow \quad \uparrow \psi$$

かつ ok.

前 Claim かつ ok.

(3) Fact

(i) $G^\circ \triangleleft G$: of finite index

(ii) $H \subset G$: closed, fin. index $\Rightarrow G^\circ \subset H.$

$(L^{G^\circ})^{G/G^\circ} = k$ かつ Fact (i) かつ 合中 2, 有限次 Galois 理論 かつ L^{G°/k は fin. Galois ext かつ $\text{Gal}(L^{G^\circ}/k) = G/G^\circ$ かつ $\exists$.

$\subset L^{G^\circ}/k$ は fin. ext かつ ok.

$\supset u \in L: \text{alg.}/k$ かつ $\exists$.

$$\# G \cdot u = \# \{ \sigma(u) \mid \sigma \in G \} < \infty, \text{ 最小多項式 を考えれば ok.}$$

$$G/\text{Stab}_G(u) \rightarrow G \cdot u: \text{bij}$$

かつ $G/\text{Stab}_G(u)$ は finite set かつ $\exists$.

Fact (ii) かつ $G^\circ \subset \text{Stab}_G(u).$

$$\therefore u \in L^{G^\circ}. \quad \square$$

Cor 1.40

Prop 1.34 (2) (ii).

(construction of DE)

$$L = \text{frac}(R), \mathbb{A} = \text{Spec}(R) \text{ とする.}$$

$$\exists \tilde{R}/k : \text{fin. Galois ext s.t. } \mathbb{A}_{\tilde{R}} \cong G_{\tilde{R}} \leadsto \tilde{R} \otimes_k R \cong \tilde{R} \otimes_C C[G]$$

$$\leadsto \tilde{R} \otimes_k L^H \cong \tilde{R} \otimes_C Q(C[G/H])$$

$$\leadsto R^H : \text{f.g. } k\text{-alg. (cf. } \tilde{R} \otimes_k R^H : \text{f.g.)}$$

$\Rightarrow$ ある $\mathbb{A}$ の $\mathbb{A}^H$ の直交.

$$\exists y_1, \dots, y_n \in R^H \text{ s.t. } \left\{ \begin{array}{l} \cdot R^H = k[y_1, \dots, y_n] \\ \cdot \langle y_1, \dots, y_n \rangle_k : \text{fix-dim } k\text{-vect sp., } G/H\text{-inv.} \end{array} \right.$$

$$W := W(y_1, \dots, y_n) : \text{wronskian, } B := W'W^{-1} \text{ とする, } \underbrace{W' = BW}_{= \text{f.g. } k\text{-alg.}} \text{ DE } \square$$

e.g. 1.35 (1) $y' = a \ (a \in k)$ に對して Galois grp は, $\text{Gal} = \begin{cases} \{1\} & (\exists b \in k \text{ s.t. } b' = a) \\ C & (\text{otherwise}) \end{cases}$

(2) $y' = ay \ (a \in k')$ に對して, $\text{Gal} = \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & (\exists b \in k \text{ s.t. } b' = ma b) \\ C^\times & (\text{otherwise}) \end{cases}$

$$\text{torsor} = \begin{cases} k[x, x^{-1}] / (x^m - b) \\ k[x, x^{-1}] \end{cases}$$

$$y' = cy$$

(3) $y'' = c^2 y \ (c \in C)$ に對して, Picard-Vessiot ring は, $R = C(\mathbb{A})[y, y^{-1}]$ とする.
Gal grp は = 直交群 とする, torsor は R .

(4) L : Picard-Vessiot field for $y' = Ay \ (A \in M_n(k))$,

F : fund. matrix for $y' = Ay$.

$$\text{Gal}(L/k) \subset \text{SL}_n(C) \Leftrightarrow \det(F) \in k^\times$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in k^\times \text{ s.t. } u' = (T(A))u.$$

$$k = C(\mathbb{A}), C_k = C = \overline{C}^{\text{alg}}, \text{ch}(C) = 0 \text{ とする.}$$

$$r \in k^\times \text{ に對して, } y'' = ry \text{ の Galois grp } G \text{ に } r \neq 0 \text{ とする.}$$

$$G \subset \text{SL}_2(C) \text{ の 1 次元部分群は以下の通りとされる:}$$

(1) G : reducible ... G -inv. の line がある. $\leadsto G \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} : \text{alg. grp}$

(2) G : irreducible ... 2本の G -inv. の line がある.

↑

$$\uparrow \{C\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}\} \text{ など } G \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(3) G : 判別力 3 種類

(4) $G = SL_2(\mathbb{C})$

Exercise 1.36.1

$r \in K = \mathbb{C}(z)$ に對し, $y' = ry$ の Galois group $\in G$ とする.

(a) $G \subset SL_n(\mathbb{C})$.

(b) $u = \frac{y'}{y}$ とすると, Riccati DE $u' + u^2 = r$ が得られる

また $y = \exp(\int u)$ とすると, 再 $u'' y'' = ry'$ が得られる.

$\Rightarrow$ $u' + u^2 = r$ の解 $u = u_1$ が 1 個見つかれば, 十分.

$u_2 = u_1 + v$ の形を採ると, Bernoulli $v' + 2u_1 v + v^2 = 0$ が得られる.

$w = \frac{1}{v}$ とすれば, 1 階線形 DE $w' - 2u_1 w + 1 = 0$ が得られる.

このとき

$$w = \exp\left(2 \int u_1\right) \times \left(-\int \exp(-2 \int u_1) + C_0\right)$$

となる ($C_0 \in \mathbb{C}$: 積分定数)

(c) G : reducible $\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{C}(z)$ s.t. $u' + u^2 = r$.

(d) G : irreducible and imprimitive

$$\Leftrightarrow \exists k_0/k: 2\text{-次拡大}, \exists u_1, u_2 \in k_0 (u_1 \neq u_2) \text{ s.t. } \left. \begin{array}{l} u_1, u_2 \text{ は } u' + u^2 = r \text{ の解} \\ u_1 \text{ と } u_2 \text{ は 共役} \end{array} \right\}$$

(e) $\exists k_0/k: n\text{-次拡大}$ s.t. $u' + u^2 = r$ が k_0 で解を持つ

$\Rightarrow$ (i) $n=1 \Leftrightarrow G$: reducible

(ii) $n=2 \Leftrightarrow G$: irreducible and imprimitive

(iii) $n=4 \Leftrightarrow$ tetrahedral

(iv) $n=8 \Leftrightarrow$ octahedral

(v) $n=12 \Leftrightarrow$ icosahedral

また, 次の成り立つ:

$\Rightarrow$ n が k の外に無い $\Leftrightarrow G = SL_n(\mathbb{C})$.

pf. (a) y' の 2 重根が u のとき $\text{Tr}(\text{companion}) = 0$ より. 従って

(cf. Exercise 1.25. (5))

(c) $V := \{y \in L \mid y'' = ry' = cy_1 + cy_2 \text{ なる } y \text{ がある}\}$

$\Rightarrow$ line of G -inv. $\exists cy_0 \in V$ なる y_0 .

$\forall \sigma \in G: \sigma(y_0) = ay_0$ なる $a = a_0 \in C^\times$ がある.

$$\sigma(y'_0) = \sigma'(y_0) = (ay_0)' = a'y_0 + ay'_0 = ay'_0.$$

$$\therefore \sigma\left(\frac{y'_0}{y_0}\right) = \frac{\sigma(y'_0)}{\sigma(y_0)} = \frac{ay'_0}{ay_0} = \frac{y'_0}{y_0} \quad (\text{i.e. } \frac{y'_0}{y_0} \in L^G = k)$$

$\Rightarrow$ $u_0 = \frac{y'_0}{y_0}$ は $u' + u^2 = r$ の解である.

$\Leftarrow u' + u^2 = r$ の解 $\exists u_0 \in k$ なる u_0 .

$\Rightarrow u_0$ により $y_0 \in L$ なる y_0 が存在する (i.e. $y_0 \in V$).

$$\left(\begin{array}{l} \exists L_0/L: \text{Picard-Vessiot field } \exists \text{ する} \\ y'_0 = u_0 y_0 \text{ なる } y_0 \in L_0 \text{ がある.} \\ \Rightarrow y'' = ry \text{ なる } y_0 \in L. \end{array} \right)$$

$$\frac{\sigma(y'_0)}{\sigma(y_0)} = \sigma\left(\frac{y'_0}{y_0}\right) = \sigma(u_0) = u_0 = \frac{y'_0}{y_0}$$

$$\therefore \exists a \in L \text{ s.t. } \sigma(y'_0) = ay'_0, \sigma(y_0) = ay_0.$$

$\Rightarrow$ $2''$

$$ay'_0 = \sigma(y'_0) = (\sigma(y_0))' = (ay_0)' = a'y_0 + ay'_0 = ay'_0$$

より $a' = 0$ (i.e. $a \in C$).

$\therefore cy_0: G$ -inv. $\square$

Exercise 1.36.2

$y'' = ry := \left(\frac{5}{16}x^{-2} + 2\right)y / k = C(x)$ なる y がある.

(a) $k_0 := C(x)$ なる $(x^2 = 2)$.

$u_1 := -\frac{1}{4}x^{-1} + x \in k_0$ は $u' + u^2 = r$ の解である.

同 Exercise (d) より $u_2 := -\frac{1}{4}x^{-1} - x \in k_0$ も解である.

(b) Picard-Vessiot ring は $R = C(x)[y_1, y_1']$ なる y_1 .

ただし y_1 は $y_1' = u_1 y_1$ なる y_1 である.

(c) $\text{Gal}(R/k) = \text{dihedral} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid a \in C^\times \right\}.$

§ 1.5 Liouvillian extensions

Def 1.42

k . diff. field, $C = C_k = \bar{C}_k$: const.

K/k : Liouvillian ext.

$\Leftrightarrow$ $C_k = C$

$\exists$ tower of diff. fields $k_0 = k < k_1 < \dots < k_n = K$

s.t. $K_i = K_{i-1}(x_i)$ w/ $\begin{cases} 1. x_i' \in K_{i-1} \\ 2. x_i \neq 0, \frac{x_i'}{x_i} (= (\log x_i)') \in K_{i-1} \\ 3. x_i \text{ alg. } / K_{i-1} \end{cases}$

Thm 1.43

K/k : Picard-Vessiot ext, $G := \text{Gal}(K/k)$

TFAE : (1) G^0 solvable.

(2) K/k : Liouvillian

(3) K is contained in a Liouvillian ext. of k

e.g. $\mathbb{C}(e^x)/\mathbb{C}$, $y' = y$, $\text{Gal} = \mathbb{G}_m$, $R = \mathbb{C}[Y, Y^{-1}]$ (cf. eg. 1.19).

Gal of $\bar{\mathbb{C}}$ is $\sigma(Y) = aY$ ($a \in \mathbb{C}^*$) $\exists \frac{1}{a} \neq 1$.

e.g. $\mathbb{C}(x, e^x)/\mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\text{Gal} = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m$.

e.g. $\mathbb{C}(x, e^x)/\mathbb{C}(x^2)$.

$f(x^2) := (x^2)' = 2xx' \leadsto x' = \frac{f(x^2)}{2x} \leadsto B = W'W^{-1} = \frac{f(x^2)}{2x^2}$

$\therefore \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f(x^2)}{2x^2} \\ y_2 \end{pmatrix} \leadsto \text{Gal} = \mathbb{G}_m \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(proof of Thm 1.43)

(1) $\Rightarrow$ (2) K/k is spl. field $\exists$ DE of order $n \in \mathbb{N}$, $L(y) = 0 \in \mathbb{C}[y]$.

$G := \text{Gal}(K/k) \subset \mathbb{S}_n$

$k_0 \in$ fixed field of $G^0 \subset \mathbb{S}_n$, k_0/k is fin. ext. $\exists$ $\mathbb{C}[y]$.

K/k_0 is Picard-Vessiot ext of $L \in \mathbb{C}[y]$, $\text{Gal}(K/k_0) = G^0$.

$$V(C_K) \subseteq \text{解空間} \ni \exists \exists \epsilon, \dim(V) = n.$$

observation 1.26 f/1. $G^0 \hookrightarrow GL(V)$ b/v 1/3.

④ $C = \bar{C}$ を使う.

618 square m² Thm A.46 (Lie-Kolchin) 5/1. 次は成り立つ.

$$\exists g_1, \dots, g_n \in V \text{ such s.t. } G^0 \subset \{ \text{upper half plane} \}$$

2つの次元に閉じる induction 2"示す.

$$\dim(G^0) = 0 \text{ かつ } \dim(G) = 0 \text{ かつ } k/k \text{ は alg. ext. (3型)}$$
$$\dim(V) = 1 \text{ n.e.}, y' + ay = 0 \text{ f. exp.}$$

(i) $f_1 \notin R_0$ ନିଜ

$$\forall \sigma \in \mathcal{F}_0, \sigma(y_1) = c_\sigma y_1. (\exists c_\sigma \in \mathbb{C}^*)$$

$$\sim \sigma(y'_1) = \sigma(y_1)' = c y'_1$$

$$\therefore \sigma\left(\frac{y'_1}{y_1}\right) = \frac{\sigma(y'_1)}{\sigma(y_1)} = \frac{C_0 y'_1}{C_0 y_1} = \frac{y'_1}{y_1} \quad (\text{i.e. } \frac{y'_1}{y_1} \in k_0)$$

$$\begin{matrix} K \\ 1 \end{matrix} \} \text{Picard-Vessiot}$$
$$K_0(Y_1) \not\cong \text{exp} \rightarrow \underline{\text{Gal}(K/K_0(Y_1))} \subseteq G^0$$

$\dim < \dim(G^0)$ の induction の仮定に依る。

P_0
1
k

3型

10 tower is 110 million 2... 3 = 2 2 1 2 4 3.

(ii) $y_1 \in k_0$ のとき, y_1 は必ずしも $DE \ni L(y) = a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = 0$ である。

$$L(\mathcal{Y}\mathcal{Y}_1) = a_n(\mathcal{Y}\mathcal{Y}_1)^{(n)} + \dots + a_0(\mathcal{Y}\mathcal{Y}_1)$$

$$= \underbrace{a_n y_1}_{b_n} y^{(n)} + \underbrace{(a_n y_1' + a_{n-1} y_1)}_{b_{n-1}} y^{(n-1)} + \dots + \underbrace{(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1)}_{b_0} y$$

f の解 Σy_j ($j=2, \dots, n$) とする。

$$L(y) = 0 \text{ の解 } \Sigma y_j \quad (j=2, \dots, n) \text{ である.}$$

$$L_n \left(\left(\frac{y_j}{y_i} \right)' \right)^{(n-1)} + \dots + L_1 \left(\left(\frac{y_j}{y_i} \right)' \right) = L \left(\frac{y_j}{y_i} y_i \right) = L(y_j) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}, \dots, \frac{d^n}{dx^n} \text{ is lin. indep. / } \mathbb{C} \text{ 中. (略)}$$
$$\mu(z) := b_n z^{(h-1)} + \dots + b_1 z \text{ on Picard-Vessiot field } \in K \text{ とする.}$$

$\text{Gal}(\tilde{K}/k_0) = \text{quotient of } G^0 \text{ is, 5 elements) soluble.}$

induction on 5反定判. $\mathbb{R}/k_0$ is liouvillean $\Rightarrow$ 否.

$$K = \widehat{K} \left(\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1} \right) \cong \widehat{K} \left(\frac{y_2}{y_1} \right) \in \widehat{K}. \quad \therefore K/\widehat{K}: \text{Picardian}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) $M := k(x_1, \dots, x_n) / K$: Liouvillian $\Leftrightarrow$ である。

n : 関する induction を示す。

$n=1$ のとき, K/k : separable である $DE \exists, L(y)=0$ である。

$\Rightarrow$ のとき $k(x_1)/k(x_1)$ は Picard-Vessiot ext for $L(y)=0$.

$$H := \text{Gal}(k(x_1)/k(x_1)) \rightarrow \text{Gal}(K/k) = G$$

$\uparrow$ closed

$$K^H = k(x_1)^H \wedge K = k(x_1) \wedge K$$

K は Picard-Vessiot field for $L(y)=0$ / $k(x_1) \wedge K$ 対し, $\text{Gal}(K/K^H) = H$

$K \subset (k(x_1) \wedge K)(x_2, \dots, x_n)$ の induction の仮定から, H^0 は solvable.

② $k(x_1) \wedge K = k$ のとき, $G = H$ 対し ok.

$k(x_1) \wedge K \neq k$ のとき.

(i) x_1 の alg. / k のとき, $K^H = k(x_1) \wedge K / k$: alg. ext.

$$K^H \subset K^{G^0} \text{ 対し, } H \supset G^0. \quad \therefore H^0 = G^0$$

(ii) x_1 の trans. / k のとき

(I) $x_1' = a \in k$ のとき, $\text{Gal}(k(x_1)/k) = G_a$.

($a=0$ のとき $x_1 \in C$ 対し, x_1 の trans. は矛盾).

$\dim(G_a) = 1$ 対し, $\text{Gal}(k(x_1)/k)$ は no proper subgroup である。

$\therefore k(x_1) \wedge K = k(x_1)$. (= k のとき先ず成立した)

$\forall \sigma \in G = \text{Gal}(K/k)$: $\sigma(x_1) = x_1$

$$\sigma(x_1)' = \sigma(x_1') = \sigma(a) = a$$

対し, $\sigma(x_1)$ は解である。

$$\text{Gal}(K/k(x_1)) \hookrightarrow \text{Gal}(K/k) \rightarrow \text{Gal}(k(x_1)/k) \rightarrow 1$$

$\parallel$
 H : solvable

$\parallel$
 G

$\parallel$
 G_a

(II) $\frac{x_1'}{x_1} \in k$. $x_1' = ax_1$, $a \in k^\times$ のとき

$R = k[y, y^{-1}]$ は Picard-Vessiot ring であり, $\text{Gal}(k(x_1)/k) = G_m$

$\mu_a \subset G_m$ に注意する.

$\forall \sigma \in G_1 = \mu_a \subset G_m$, $\sigma(x_1)$ は解である.

$$(\odot \sigma(x_1)' = \sigma(x_1') = \sigma(ax_1) = a\sigma(x_1))$$

$$1 \rightarrow \text{Gal}(K/k_1(x_1) \wedge K) \rightarrow \text{Gal}(K/k) \rightarrow \text{Gal}(k(x_1)/k) \rightarrow 1$$

$\parallel$
 H

$\parallel$
 G_m

$\square$

Rem. Thm A.46 (Lie-Kolchin)

$G \subset GL_n$: connected, solvable
 $\Rightarrow G$ conj. to subgroup of $\{ \text{upper } \Delta's \}$.

(idea of pf.)

$G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}] \subset L_2$, $G \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} = H \supset \{1\} \subset \{0\}$.
 $\uparrow$ Abelian

(i) G : commu. $n \leq 2$

$AB = BA$ no common eigen. vector

$n \geq 3$ induction $\Rightarrow$ 示す.

(ii) $G^{(1)}$ の中 $\subset$ commu. subgroup $H \neq \{1\}$ がある $\Rightarrow$

$\exists$ non-trivial G -inv. subg. $W \subset V$ がある $\Rightarrow$ は, $GL(W) \subset GL(V/W)$ に作用する.

ETS: $\Rightarrow$ のおかげで W の $\dim$ が減る $\Rightarrow$ 矛盾 $\Rightarrow$ 示す.

$$h u = \chi(h) u \quad (\chi: \text{char on } H)$$

$H \triangleleft G$ より

$$h g u = g g^{-1} h g u = g \chi(g^{-1} h g) u \quad (*)$$

$\Rightarrow$ $g u$ is eigen vector of H $\Rightarrow$ は

$\langle H$ -joint common eigen vector $\rangle$ は G -inv. $\Rightarrow$ がある.

$$\therefore H \subset \left\{ \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} \right\}.$$

torus subgroup $\cong \mathbb{G}_m^r \times \text{finite Abelian}$ より, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists$ $A_N := \{ \text{order } n \mid n \leq N \}$ is finite.

G は A_N 上 $\mathbb{Z}$, G は connected より, G は各点を固定する.

$$\therefore H \subset Z(G).$$

より, $\exists$ $\exists$ $\exists$ 注意する $\Rightarrow$, $H = \{1\}$... 矛盾. $\square$

Category of differential modules

§1. The category Diff_k .

k : diff. field, $C = \overline{C}$, $\text{ch}(C) = 0$

$\text{Diff}_k :=$ The cat of fin-dim diff mod / k

$$\text{Hom}(N, N') := \{ f: N \rightarrow N' : k\text{-lin.} \mid \partial \circ f = f \circ \partial \} \quad (\forall N, N')$$

Def

- $\mathbb{1}_k := (k, \partial)$
- $(N, \partial) \in \text{Diff}_k$ i.e. $\partial \in \mathcal{L}_N$, N' : subdiff. mod: $\Leftrightarrow \partial(N') \subset N'$.
($\sim (N', \partial), (N/N', \bar{\partial}) \in \text{Diff}_k$)
- $N, N' \in \text{Diff}_k$ i.e. $\partial \in \mathcal{L}_N, \mathcal{L}_{N'}$
 - $N \oplus N' \in \text{Diff}_k$ ($\partial(x \oplus x') := \partial x \oplus \partial x'$)
 - $N \otimes N' \in \text{Diff}_k$ ($\partial(x \otimes x') := \partial x \otimes x' + x \otimes \partial x'$)
 - $\forall \varphi \in \underline{\text{Hom}}_k(N, N') := \{ \varphi: N \rightarrow N' : k\text{-lin.} \} \subset \mathcal{L}_{N, N'}$
($\partial \varphi)(x) := \partial(\varphi(x)) - \varphi(\partial x)$ ($\forall x \in N$).
 - $N^* := \underline{\text{Hom}}_k(N, \mathbb{1}_k)$

Rem. $(\underline{\text{Hom}}_k(N, N'))^\partial = \{ \varphi: N \rightarrow N' \mid \partial \varphi = 0 \} = \text{Hom}_\partial(N, N')$

Rem. $N^{**} \xrightarrow{\cong} N$, $(\varphi \mapsto \varphi(x)) \leftarrow x$ in Diff_k

$\underline{\text{Hom}}_k(N, N') \xrightarrow{\cong} N^* \otimes_k N'$, $(\varphi \mapsto \varphi(y)x) \leftarrow \varphi \otimes x$ in Diff_k

§2. The category $\text{Rep}_C(G)$

$G \subset \text{GL}_n(C)$: alg. grp / C .

Def

V : fin-dim vect sp. / C , $\rho: G \rightarrow \text{Aut}(V)$: hom s.t. C -mor. of sch. / C .
 ρ is $(V, \rho) \in$, (alg.) rep of G / C i.e. $\rho(g) \in \text{GL}(V)$.

$\neq$

$\text{Rep}_C(G) :=$ The category of rep. of G / C .

$$\text{Hom}_G(V, W) := \{ f: V \rightarrow W : C\text{-lin.} \mid g f(-) = f(g(-)) \quad (\forall g \in G) \} \quad (\forall V, W)$$

Def

- $\mathbb{1}_G = C$: trivial G -action
- $W \subset V$: Subrep $\Leftrightarrow gW \subset W \ (\forall g \in G)$.
 $\leadsto (W, \rho), (V/W, \bar{\rho}) \in \text{Rep}_C(G)$.
- $V, W \in \text{Rep}_C(G) \nVdash \perp$
 - $V \oplus W \in \text{Rep}_C(G) \ (g(u \oplus w) := g(u) \oplus g(w))$
 - $V \otimes_C W \in \text{Rep}_C(G) \ (g(u \otimes w) := g(u) \otimes g(w))$
 - $\forall \varphi \in \text{Hom}_C(V, W) := \{ \varphi : V \rightarrow W : C\text{-lin} \} \nVdash \perp$
 $(g\varphi)(u) := g(\varphi(g^{-1}u)) \ (\forall g \in G)$
- $V^* := \text{Hom}_C(V, W)^G$

Rem. $V^* = \{ \varphi : V \rightarrow W \mid g\varphi = \varphi \ (\forall g \in G) \} = \text{Hom}_G(V, W)$.

Rem. §1 $\subset \mathbb{F}^L := \{ \text{all } \varphi \}$.

§3. The functor S

$\mathcal{M} \in \text{Diff}_K$: fix

$\{ \mathcal{M} \} :=$ The smallest full subcategory of Diff_K

i.e. $\{$

- containing $\mathcal{M}$
- closed under taking $\oplus, \otimes, (-)^*,$ subquotient

(Rem. $N \in \{ \mathcal{M} \} \Leftrightarrow N$ is a subquotient of a direct sum of several $\mathcal{M}$)
 $\mathcal{M}_n^{m,n} = \underbrace{\mathcal{M} \otimes \dots \otimes \mathcal{M}}_{m,n} \otimes \underbrace{\mathcal{M}^* \otimes \dots \otimes \mathcal{M}^*}_{m,n}$

K : Picard-Vessiot field of $\mathcal{M}$: fix $\leadsto G := \text{Gal}(K/k)$
 $\leadsto \text{Rep}_C(G)$

Def

- $N \in \text{Diff}_K \nVdash \perp, K \otimes_K N \nVdash \perp$
- $\text{diff} : \partial(a \otimes x) := (\partial a) \otimes x + a \otimes (\partial x)$
- G -action $\cdot g(a \otimes x) := g(a) \otimes x$
- $\partial g = g \partial$.

Def
 $N \in \text{Diff}_k$ 1. 2

• $\text{Rep}_G(G) \ni S(N) = S_k(N) := (K \otimes_k N)^\partial \hookrightarrow G$

• $\varphi: N \rightarrow N': k[\partial]$ -hom (i.e. k -lin. and commu. w/ ∂)

no $\text{id} \otimes \varphi: K \otimes_k N \rightarrow K \otimes_k N': k[\partial]$ -hom

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ S(N) & \xrightarrow{\quad} & S(N') \\ & \searrow S(\varphi) & \end{array}$$

no G -lin. functor $S: \text{Diff}_k \rightarrow \text{Rep}_G(G)$ 4. 定まる

Rem. $K \otimes_c S(N)$ 1. 2

$$\partial(a \otimes u) := (\partial a) \otimes u, \quad g(a \otimes u) = ga \otimes gu$$

1. 2) $\partial \in G$ -action 2. 定まる

$$\begin{array}{ccc} C_N: K \otimes_c S(N) & \rightarrow & K \otimes_k N \\ a \otimes u & \mapsto & au \end{array} \quad \leftarrow S(N) \subset K \otimes_k N \text{ 注意}$$

1. 3 $\partial \in G$ -action 2. compatible 1. 2. 3.

Prop
 (i) $C_N: \text{Iso} \Leftrightarrow K \otimes_k N \cong \mathbb{1}_K^{\oplus n}$ (i.e. trivial / K)

$$\Leftrightarrow \exists e_1, \dots, e_n: \text{basis / } K \text{ of } K \otimes_k N \text{ s.t. } \partial e_i = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, n)$$

(ii) $N, N': \text{trivial / } K, N'': \text{subquotient of } N$

$$\Rightarrow N \oplus N', N \otimes N', N^*, N'': \text{trivial / } K.$$

1. 2. 3. $N \in \mathcal{M} \Leftrightarrow N: \text{trivial / } K.$

pf. (i) easy.

(ii) ETS: $N: \text{trivial / } K, N'' \subset N: \text{subdiff. mod} \Rightarrow N'', N/N'': \text{trivial / } K.$

$$0 \rightarrow K \otimes_c S(N'') \rightarrow K \otimes_c S(N) \rightarrow K \otimes_c S(N/N'') \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow \cong & & C_N \downarrow \cong & & \downarrow \text{Surj.} & \text{mono Iso} & \\ 0 \rightarrow K \otimes_k N'' & \rightarrow & K \otimes_k N & \xrightarrow{\text{Surj.}} & K \otimes_k (N/N'') & \rightarrow & 0 \end{array} \quad \square$$

Prop
| $N, N' \in \mathcal{M}??$

$$(i) S(1_K) \cong 1_G$$

$$(iii) \ S(N \oplus N') \cong S(N) \oplus S(N')$$

$$(iii) \ S(N \otimes_R N') \cong S(W) \otimes_C S(N').$$

(iv) $S(\underline{\text{Hom}}_R(N, N')) \cong \underline{\text{Hom}}_C(S(N), S(N'))$.

Pr. (iii) $K \otimes_c S(N \otimes_R N') \xrightarrow[\cong]{C_{N \otimes N'}} K \otimes_R (N \otimes_R N')$

$$\begin{array}{c} (a \otimes x) \otimes (b \otimes y) \\ \mapsto ab \otimes (x \otimes y) \end{array} \xleftarrow{\cong} (K \otimes_K N) \otimes_K (K \otimes_K N')$$

$$\xleftarrow{\cong} (K \otimes_C S(N)) \otimes_K (K \otimes_C S(N'))$$

$$\begin{array}{ccc} (a \otimes v) \otimes (f \otimes w) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & K \otimes_c (S(W) \otimes_c S(W')) \\ \mapsto ab \otimes (v \otimes w) & & \end{array}$$

: compatible w/ ∂ and G -action

$$\partial = \partial \circ 11^0 - \frac{1}{2} \varepsilon \otimes \partial \varepsilon. S(N \otimes_R N') \cong S(N) \otimes_C S(N') \text{ 不 得 证. } \square$$

§4. Main Theorem

Thm 2.33

(1) $\forall N, N' \in \mathcal{M}$, $S: \text{Hom}_\mathcal{A}(N, N') \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_\mathcal{G}(S(N), S(N'))$.

$$(2) \forall V \in \text{Rep}(G), \exists N \in \mathcal{M} \text{ s.t. } S(N) \cong V.$$

Rem. 実付

$$T = T_K: \text{Rep}_c(G) \rightarrow \mathcal{M}, V \mapsto (K \otimes_c V)^G \xrightarrow{\partial \otimes \text{id}}$$

4" S の quasi-inverse functor z がある.

pf. (1) $N, N' \in \mathcal{M}$ である。

$$\begin{aligned} K \otimes_R \underline{\text{Hom}}_R(N, N') &\xrightarrow{\cong} \underline{\text{Hom}}_K(K \otimes_R N, K \otimes_R N') \\ &\xleftarrow[\cong]{C_{N'} \circ (-) \circ C_N^{-1}} \underline{\text{Hom}}_K(K \otimes_C S(N), K \otimes_C S(N')) \\ &\xleftarrow{\cong} K \otimes_C \underline{\text{Hom}}_C(S(N), S(N')) \end{aligned}$$

: compatible w/ ∂ and G -action.

$$(K \otimes_R \underline{\text{Hom}}_R(N, N'))^{G, \partial} = \text{Hom}_{\partial}(N, N')$$

$\Rightarrow$ 射 f によつて, $f: N \rightarrow N'$ は $S(f): S(N) \rightarrow S(N')$ に射誘起する.

$$V \in \text{Rep}_G(G) : \text{Faithful (i.e. } G \hookrightarrow \text{Aut}(V))$$
 $\oplus, \otimes, (-)^*, \text{subquotient}$

§ 5. Appendix

$\sim \text{Rep}_K(G) : \otimes\text{-category}$

$$W: \text{Rep}_K(G) \rightarrow \text{Vect}_K \text{ (forgetful) functor}$$
$$(Aut^{\otimes} \omega)(R) := \left\{ (\sigma(x) : R \otimes_R \omega(x) \xrightarrow{\cong} R \otimes_R \omega(x))_{x \in \text{Reg}_R(G)} \mid (*) \right\}$$

$$(\because) \sigma(1_G) = id_{R \otimes W(1_G)}$$

$$(iv) \quad \forall X, Y, R \otimes_P (W(X \otimes Y)) \xrightarrow{\sigma(X \otimes Y)} R \otimes_P (W(X \otimes Y))$$

$$\cong \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \cong$$

$$(R \otimes_P W(X)) \otimes_P (R \otimes_P W(Y)) \xrightarrow{\sigma(X) \otimes \sigma(Y)} (R \otimes_P W(X)) \otimes_P (R \otimes_P W(Y))$$

$$G(R) \xrightarrow{\cong} (\text{Aut}^{\otimes \omega})(R), \quad g \mapsto (\sigma(X) := (g \text{ on } X))_{X \in \text{Rep}_k(G)}.$$

Thm (Tannaka's Theorem B.20)

$$\begin{array}{ccc} \text{Rep}_k(G) & \cong_{\text{cat equiv.}} & \text{Rep}_k(\text{Aut}^{\otimes} \omega) \\ \omega \searrow \cong \swarrow \text{forget} & & \\ & \text{Vect}_k & \end{array}$$

$\Rightarrow \psi \in \text{Thm 2.33 的}, \exists \text{ 反例 得 } \exists \psi \exists :$

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod} \xrightarrow{S} \text{Rep}_c(\text{Gal}(K/k)) & \text{Mod} \xrightarrow{\dots \cong} \text{Rep}_c(\text{Aut}^{\otimes} S_0) \\ S_0 = \text{forget} \circ S \searrow \cong \swarrow \text{forget} & & S_0 \searrow \cong \swarrow \text{forget} \\ & \text{Vect}_c & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \text{Mod} & \longrightarrow & \text{Rep}_c(\text{Aut}^{\otimes} S_0) \\ 2.33 \downarrow \cong & & \cong \downarrow 2.33 \\ \text{Rep}_c(\text{Gal}(K/k)) & \xrightarrow[\uparrow \text{B.20}]{\cong} & \text{Rep}_c(\text{Aut}^{\otimes} \text{forget}) \end{array} \right)$$

$\text{Aut}^{\otimes} S_0 \in \text{Tannaka dual of } (\text{Mod}, S_0) \text{ なる. } (\text{Gal}(K/k) \text{ の } \mathbb{Q} \text{ の } \mathbb{Q} \text{ 方 代 } 2 \text{ 倍 } \neq)$
 - 一般に, $\mathcal{C} \cdot \otimes\text{-cat}$ と $\omega: \mathcal{C} \rightarrow \text{Vect}_k \cdot \otimes\text{-functor}$ の組 $\in$, neutral Tannakian cat
 なる.
 satisfies suitable cat. axioms

$\Rightarrow$ の $\in \text{Thm B.22 的}, \exists \text{ 反例 得 } \exists \psi \exists :$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\cong} & \text{Rep}_k(\text{Aut}^{\otimes} \omega) \\ \omega \searrow \cong \swarrow \text{forget} & & \end{array}$$

$\sim \text{Aut}^{\otimes} \omega \text{ is affine grp sch. 的.}$
 $\Rightarrow \psi \in \text{Tannaka dual of } (\mathcal{C}, \omega) \text{ なる.}$