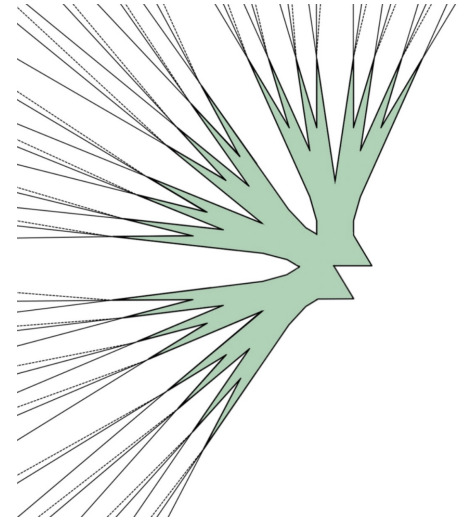


有理関数の反復合成による定義体の挙動について

1888



Reference

"The Field of Iterates of A Rational Function"

(F.Veneziano - S.Vishkautsan)

(Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux)
(arXiv : 2404.04939)

キーワード: 数論力学系

数論... 整數論

力学系... "写像の反復合成をする学問"

今日の話

$$f(x) = \sqrt{2}x \notin \mathbb{Q}[x]$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \underbrace{f \circ f}_{2回}(x) = f(f(x)) \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}x) = 2x \in \mathbb{Q}[x] \end{aligned}$$

定義

$$\overline{A} := \bigcup_{n \geq 1} \{ f \in \overline{\mathbb{Q}(x)} \mid f^n \in \mathbb{Q}(x) \}.$$

e.g. $f(x) = \sqrt{2}x \in A.$

$$(\because f^2(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}x) = 2x)$$

Motivation: A の元を “明示的” に書きたい.

★ 多項式の場合は, 次の言い換えがある.:

定理 (Veneziano - Vishikautsan)

$f \in \bar{\mathbb{Q}}[x] \setminus \mathbb{Q}[x] : \text{non-const. } \epsilon \exists \text{ する.}$

$f \in A$

$\Leftrightarrow f \sim_{\mathbb{Q}} a x^k g(x^t).$

$f \neq f''$

• $a \in \bar{\mathbb{Q}} \text{ s.t. } a^t \in \mathbb{Q}.$

• $k, t \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{互いに素}$

• $g \in \mathbb{Q}[x].$

Ex 1 $f(x) = \sqrt{-1}x(x^2 + 2x^4) = \sqrt{-1}xg(x^2) \in A.$

$\uparrow g(x) := x + 2x^2$

$\langle \times \rangle$

$f \in A$

$\Leftrightarrow f \sim_{\mathbb{Q}} a x^k g(x^t).$

$f \sim f''$

$\cdot a \in \overline{\mathbb{Q}} \text{ s.t. } a^t \in \mathbb{Q}.$

$\cdot k, t \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{互いに素}$

$\cdot g \in \mathbb{Q}[x].$

問題：有理関数の場合は？

$$\rightarrow f \in A \not\iff f \in Ax^k g(x^t)$$

531 | $C = 2 - \sqrt{3}$ とする.

$f(x) = \frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1}$ に $\frac{ax^k g(x^*)}{x^2}$ の形を代入する. $2''$ はない

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \frac{C \left(\frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1} \right)^2 - 2 \left(\frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1} \right) - C}{\left(\frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1} \right)^2 + 2C \left(\frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1} \right) - 1} \\ &= \frac{x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1}{x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1} . \end{aligned}$$