Pólya の定理と Niven の定理

t888

2026 年 11 月 7 日

概要

整数係数多項式の反復合成によって得られる軌道には, どのような周期が現れるだろうか. Pólya の定理は, 整数係数多項式の整数周期点の周期が高々 2 であることを主張する. 本稿では, 初等的な多項式の割り切りの性質を用いてこの定理を証明する. さらに, Chebyshev 多項式を用いて三角関数の値を力学系の前周期点として捉えることで, π の有理数倍の角の余弦 cos が有理数となる場合を特徴付ける Niven の定理を導く.

1 用語など

定義 1. 空間 X に対して, 自己写像を $f\colon X \to X$ とする. また点 $x \in X$ をとる.

1. $f(x)$ を n 回合成した関数を $f^n(x) = (f \circ \cdots \circ f)(x)$ で表す. また f^0 は恒等写像であるとする.
2. x が f の周期点である : $\iff$ $f^p(x) = x$ となる $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ が存在する.
   このような正整数 p の最小値を x の周期という.
3. x が f の前周期点である : $\iff$ $f^m(x) = f^n(x)$ となる整数 $m > n \geq 0$ が存在する.
4. 前周期点 x に対して, $f^m(x) = f^n(x)$ となる整数 m, n は最小になるようにとる (すなわち, まず n を最小にとり, その n に対して $m > n$ を最小にとる). このとき $m - n$ を x の周期部分の長さという. また $m(= \#\mathcal{O}_f(x))$ を軌道の長さという. ただし $\mathcal{O}_f(x) \coloneqq \{x, f(x), f^2(x) \cdots\}$ である.

2 Pólya の定理

R を環とし, $f \in R[x]$ とする. 自明なのだが

$$\frac{x^d - y^d}{x - y} \text{は多項式である}$$

という事実は重要である (見た目は有理関数であるが, 因数分解により実は多項式である). この事実を踏まえて次の命題を示す.

命題 2. $x - y$ は $f(x) - f(y)$ を割り切る.

証明. $f(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ と表示したとき

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \sum_{i=0}^{d} a_i \frac{x^i - y^i}{x - y}$$

は R 係数の多項式である. □

さて $f \in \mathbb{Z}[x]$ と $a \in \mathbb{Z}$ に対して, 次のように軌道を考える.

$$a \overset{f}{\mapsto} f(a) \overset{f}{\mapsto} f^2(a).$$

このとき $f(a) \neq a$ ならば

$$r(a) \coloneqq \frac{f^2(a) - f(a)}{f(a) - a}$$

は整数である. 実際, 命題 2 から従う. 以上の観察を踏まえて, 次の Pólya の定理を示そう.

定理 3 (Pólya)**.** モニックな整数係数多項式の $\mathbb{Q}$ 前周期点の周期部分の長さは, 高々 2 である.

証明. 周期部分について考えればよい. 次数 1 以下の場合は直接確認できるので, 以下では $\deg(f) \geq 2$ とする. $a \in \mathbb{Q}$ を n-周期点とする. $f^n(x) - x$ はモニックな整数係数多項式であり, a はその根なので $a \in \mathbb{Z}$ である. 実際, 代数的整数の定義を考えれば直ちに従う. あるいは有理根定理を用いても分かる. さて, $n = 1$ の場合は明らかなので, 以下では $n \geq 2$ とする.

そこで $0 \leq i \leq n-1$ に対して

$$r_i \coloneqq \frac{f^{i+2}(a) - f^{i+1}(a)}{f^{i+1}(a) - f^i(a)}$$

とおくと, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n-1} r_i &= r_0 r_1 \cdots r_{n-1} \\
&= \frac{f^2(a) - f(a)}{f(a) - a} \times \frac{f^3(a) - f^2(a)}{f^2(a) - f(a)} \times \cdots \times \frac{f^{n+1}(a) - f^n(a)}{f^n(a) - f^{n-1}(a)} \\
&= \frac{f^{n+1}(a) - f^n(a)}{f(a) - a} \\
&= \frac{f(a) - a}{f(a) - a} \quad (\because f^n(a) = a) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

各 r_i は整数であることから, $r_i \in \{\pm 1\}$ が成り立つ. すなわち次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
f^2(a) - f(a) &= \pm(f(a) - a), \\
f^3(a) - f^2(a) &= \pm(f^2(a) - f(a)), \\
&\vdots \\
f^n(a) - f^{n-1}(a) &= \pm(f^{n-1}(a) - f^{n-2}(a)).
\end{aligned}$$

いずれかの符号がマイナスになるとする, すなわち $f^{i+1}(a) - f^i(a) = -(f^i(a) - f^{i-1}(a))$ となる i が存在するとする. このとき, $f^{i+1}(a) = f^{i-1}(a)$ が成り立つ. これは a の周期部分の長さが高々 2 であることを意味する.

次に, 上式たちの右辺の符号がすべてプラスであるとすると, $1 \leq i \leq n-1$ に対して $f^{i+1}(a) + f^{i-1}(a) = 2f^i(a)$ が成り立つ. これは数列 $(f^i(a))_{0 \leq i \leq n}$ が等差数列であることを意味する. 今 $f^n(a) = a$ であることから, この数列の公差は 0 である. 特に $f(a) = a$ が成り立ち, これは a の周期が 1 である (固定点である) ことを意味する. □

3 Niven の定理

$0 \leq \theta < 2\pi$ に対して, 余弦 $\cos\theta$ のとりうる値を少し観察してみよう.

$$\cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \cos\pi = -1,\ \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$\theta \in \pi\mathbb{Q}$ と仮定したとき, 上で述べた余弦の値以外に有理数をとるようなものは存在するのだろうか. 答えは否である. 今日では次で述べる Niven の定理として知られている.

定理 4 (Niven)**.** $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ に対して, $\cos\theta$ が有理数となるとき, $\cos\theta$ のとりうる値は $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$ のみである. すなわち次が成り立つ.

$$\{\cos\theta \mid \theta \in \pi\mathbb{Q}\} \cap \mathbb{Q} = \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}.$$

ちなみに正弦 sin と正接 tan については, それぞれ

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

によって同様な結論が得られる.

本節では Niven の定理を, Pólya の定理を用いて示す. アイデアは, $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ に対して $\cos\theta$ が有理数であることを, 2 次 Chebyshev 多項式 T_2 の前周期点の問題に帰着させて Pólya の定理を用いるというものである. そのために Chebyshev 多項式について準備する.

定義 5. $T_n(x + x^{-1}) = x^n + x^{-n}$ を満たす n 次整数係数多項式 T_n を, n 次の Chebyshev 多項式という.

例 6. $T_1(x + x^{-1}) = x + x^{-1}$ より, $T_1(x) = x$ である. また $T_2(x + x^{-1}) = x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2$ より, $T_2(x) = x^2 - 2$ である.

補題 7. $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ に対して, $2\cos\theta$ は 2 次 Chebyshev 多項式 T_2 の前周期点である.

証明. 正の整数 n に対して, $T_2^n(2\cos\theta) = 2\cos(2^n\theta)$ である. $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ のとき, $2^n\theta \mod 2\pi$ のとりうる値は有限個である. よって, $\{2\cos(2^n\theta)\}_{n\geq 0}$ は有限集合である. 実際, $\theta \in \pi\mathbb{Q}$ ゆえ $\theta = \frac{p}{q}\pi$ と表す (ただし p, q は互いに素な整数で $q > 0$ とする) と, $2^n\theta = \frac{2^n p}{q}\pi$ が成り立つので, $T_2^n(2\cos\theta) = 2\cos\left(\frac{2^n p}{q}\pi\right)$ が成り立つ. 右辺に関して $2^n p\pi \mod 2q\pi$ のとりうる値は有限個であるから $2\cos\left(\frac{2^n p}{q}\pi\right)$ のとりうる値も有限個である. これは軌道 $\{T_2^n(2\cos\theta)\}_{n\geq 0}$ が有限集合であることを意味し, $2\cos\theta$ は T_2 の前周期点であることが分かった. □

補題 8. T_2 の固定点は $-1, 2$ であり, 2-周期点は $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である.

証明. $T_2(x) = x$ を解くと, $x = -1, 2$ が得られる. また $T_2^2(x) = x$ を解くと, $x = -1, 2, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる. □

Niven の定理の証明. Pólya の定理より, $\mathbb{Q}$ 前周期点の周期部分の長さは高々 2 である. 補題 8 より, T_2 の $\mathbb{Q}$ 周期点は $-1, 2$ のみである. 従って, $\mathbb{Q}$ 前周期点は最終的に-1 または 2 に到達する. その逆像を調べれば, $\mathbb{Q}$

前周期点がすべて求まる. そこで具体的な計算により

$$T_2^{-1}(\{-1,2\})\cap\mathbb{Q}=\{-2,-1,1,2\},$$
$$T_2^{-1}(\{-2,-1,1,2\})\cap\mathbb{Q}=\{-2,-1,0,1,2\}$$

が得られるので, さらに

$$T_2^{-1}(\{-2,-1,0,1,2\})\cap\mathbb{Q}=\{-2,-1,0,1,2\}$$

に注意すれば, $\mathbb{Q}$ 前周期点は $0,\pm1,\pm2$ のみである. 一方補題 7 より, $\theta\in\pi\mathbb{Q}$ のとき $2\cos\theta$ は T_2 の前周期点であったから, 次を得る (ただし逆の包含は $\theta=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\pi$ を代入すれば分かる).

$$\{2\cos\theta\mid\theta\in\pi\mathbb{Q}\}\cap\mathbb{Q}=\{0,\pm1,\pm2\}.$$
$$\therefore\{\cos\theta\mid\theta\in\pi\mathbb{Q}\}\cap\mathbb{Q}=\left\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\right\}.$$

□

4 2 次体の場合

前節では, 周期点を求め, その逆像を調べることで前周期点を決定した. 2 次体の整数環においても, 周期部分に加えて, そこに到達するまでの部分を調べることができる. [1] では, このような有限軌道全体を分類している. まずその結果を紹介し, 続いて余弦の値の問題を二次体へ拡張する.

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を 2 次体とし, d は $0,1$ 以外の平方因子をもたない整数とする. その整数環を R_K と書く.

定理 9. 2 次体 K に対して, とりうる周期部分の長さと単数群は次の表で与えられる. ここで $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\varepsilon_5=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とし, 実 2 次体 K に対して $\varepsilon_K>1$ を基本単数とする.

K	単数群 $R_K^\times$	とりうる周期部分の長さ	軌道の長さの最大値
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$\{\pm1,\pm\omega,\pm\omega^2\}$	$\{1,2,3,6\}$	7
$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$\{\pm1,\pm\sqrt{-1}\}$	$\{1,2,4\}$	4
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$\{\pm(1+\sqrt{2})^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\{1,2,4\}$	6
$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	$\{\pm(2+\sqrt{3})^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\{1,2\}$	5
$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$\{\pm\varepsilon_5^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\{1,2,3,4\}$	6
その他の虚 2 次体	$\{\pm1\}$	$\{1,2\}$	4
その他の実 2 次体	$\{\pm\varepsilon_K^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\{1,2\}$	4

ただし軌道が有限集合のとき, $\max\{\#\mathcal{O}_f(a)\mid f\in R_K[x],\ a\in R_K,\ \#\mathcal{O}_f(a)<\infty\}$ を軌道の長さの最大値とする.

証明のスケッチ. 第 2 節にて, 各 r_i が整数で, それらの積が 1 であったので, 各 r_i は $\mathbb{Z}$ の単数であり, $\mathbb{Z}^\times=\{\pm1\}$ から $r_i\in\{\pm1\}$ が成り立ったことを思い出そう. 2 次体の整数環でも同じ議論が出発点となる.

$f \in R_K[x]$ とし, $a \in R_K$ を n 周期点とする. ただし $n \geq 2$ とする. 命題 2 と同様の議論により次が成り立つ.

$$r_i \coloneqq \frac{f^{i+2}(a) - f^{i+1}(a)}{f^{i+1}(a) - f^i(a)} \in R_K, \qquad \prod_{i=0}^{n-1} r_i = 1.$$

従って, 各 r_i は R_K の単数である. 例えば $R_K^* = \{\pm 1\}$ である虚 2 次体では, 第 2 節と同様に周期部分の長さは高々 2 である.

単数同士の和を調べることで, さらに周期を制限できる. 例えば 3 周期があるとすると次が得られる.

$$1 + r_0 + r_0 r_1 = \frac{f^3(a) - a}{f(a) - a} = 0.$$

従って $u \coloneqq -r_0$ と $v \coloneqq -r_0 r_1$ は, $u + v = 1$ を満たす単数である. 虚 2 次体の単数群は, $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ では $\{\pm 1, \pm\sqrt{-1}\}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ では $\langle \zeta_6 \rangle$, それ以外では $\{\pm 1\}$ である. ただし $\zeta_6 = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ である. $\{\pm 1\}$ と $\{\pm 1, \pm i\}$ には和が 1 になる組がなく, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ では $\zeta_6 + \zeta_6^{-1} = 1$ が成り立つ. 実 2 次体では, 基本単数を $\varepsilon_K > 1$ とすると $R_K^\times = \{\pm \varepsilon_K^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ である. この単数群の中で $u + v = 1$ が成り立つ体を, ノルムを使って絞る. $s = N_{K/\mathbb{Q}}(u), t = N_{K/\mathbb{Q}}(v)$ とおくと, $s, t \in \{\pm 1\}$ であり, $v = 1 - u$ より次が成り立つ.

$$t = 1 - \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(u) + s.$$

従って, u は $X^2 - (1 + s - t)X + s$ の根である. s, t の 4 通りの組合せに対し, 判別式は-3 または 5 となる. u は実数なので判別式は 5 であり, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ となる. 実際, 基本単数 $\varepsilon_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対して, $\varepsilon_5 - \varepsilon_5^{-1} = 1$ が成り立つ. 以上より, 3 周期が現れうるのは $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に限られる. □

次に余弦について議論する. 例えば

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

はいずれも 2 次無理数 ($[\mathbb{Q}(\alpha)\colon \mathbb{Q}] = 2$ となる無理数 α のこと) である. 前節の Niven の定理を一般化して, 次の定理が成り立つ.

定理 10. $r \in \mathbb{Q}$ とする. $\cos r\pi$ が 2 次無理数であるならば, 次の値すべてをとりうる.

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

参考文献

[1] Roman Marszałek, Wladyslaw Narkiewicz, *Finite polynomial orbits in quadratic rings*, The Ramanujan Journal 12 (2006), 91–130.

[2] Chatchawan Panraksa, Detchat Samart, Songpon Sriwongsa, *A dynamical system proof of Niven's theorem and its extensions*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, Volume 109, Issue 1, February 2024, pp. 138-151.

[3] Joseph H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007.