数論力学系の作問 1

t888

2026 年 11 月 15 日

問題 1. $0 \overset{f}{\underset{f}{\rightleftarrows}} 5$ と $1 \overset{f}{\underset{f}{\rightleftarrows}} 4$ を同時に実現するような次数 2 以上の整数係数多項式 $f(x)$ を創れ．この条件を満たす多項式の最小次数も求めよ．

(解説). 条件を同時に満たす整数係数 1 次多項式 $f(x)$ は $5-x$ である．そこで 4 点 0, 5, 1, 4 すべてで 0 になるような項を踏まえて, 次のような整数係数 4 次多項式を考える．

$$f(x) = 5 - x + x(x-1)(x-4)(x-5).$$

このように構成した $f(x)$ は題意を満たす．

次に, 条件を満たす整数係数多項式の次数の最小性について述べる．条件を満たす任意の整数係数多項式 $f(x)$ に対して, $f(x)-(5-x)$ は $0, 1, 4, 5$ を根に持つ．$f(x)$ の次数は 2 以上であるから, この差は $f(x)$ と同じ次数をもつ．相異なる根が 4 つあるから, $f(x)$ の次数は少なくとも 4 ある．よって, 条件を満たす最小次数は 4 である． □

問題 2. $0 \overset{f}{\mapsto} 5 \overset{f}{\mapsto} 7$ を満たすような整数係数多項式 $f(x)$ は創れるか．

(解説). 条件を満たすような整数係数多項式は存在しないことを背理法により示す．一般に, 整数係数多項式 $f(x)$ に対して, $x-y$ は $f(x)-f(y)$ を割り切ることに注意する．よって条件を満たすような整数係数多項式 $f(x)$ が存在すると仮定すると, 先程の観察から整数係数多項式では $f(5)-f(0)$ は 5 の倍数である．一方, $f(0)=5, f(5)=7$ より $f(5)-f(0)=2$ である．2 は 5 の倍数ではないので矛盾する．以上より, 題意を満たす整数係数多項式は存在しない． □