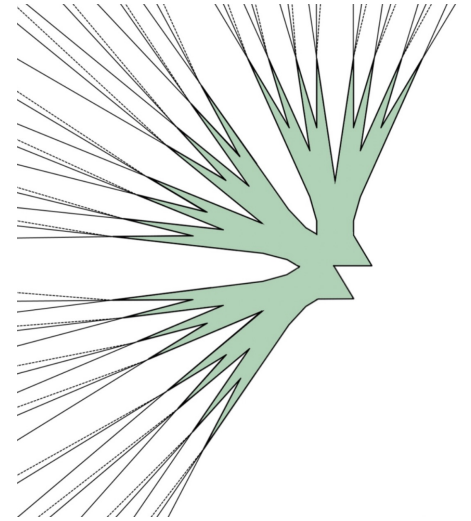


有理関数の反復合成による定義体の挙動について

1888



Reference

"The Field of Iterates of A Rational Function"

(F.Veneziano - S.Vishkautsan)

(Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux)
(arXiv : 2404.04939)

代數的整數論

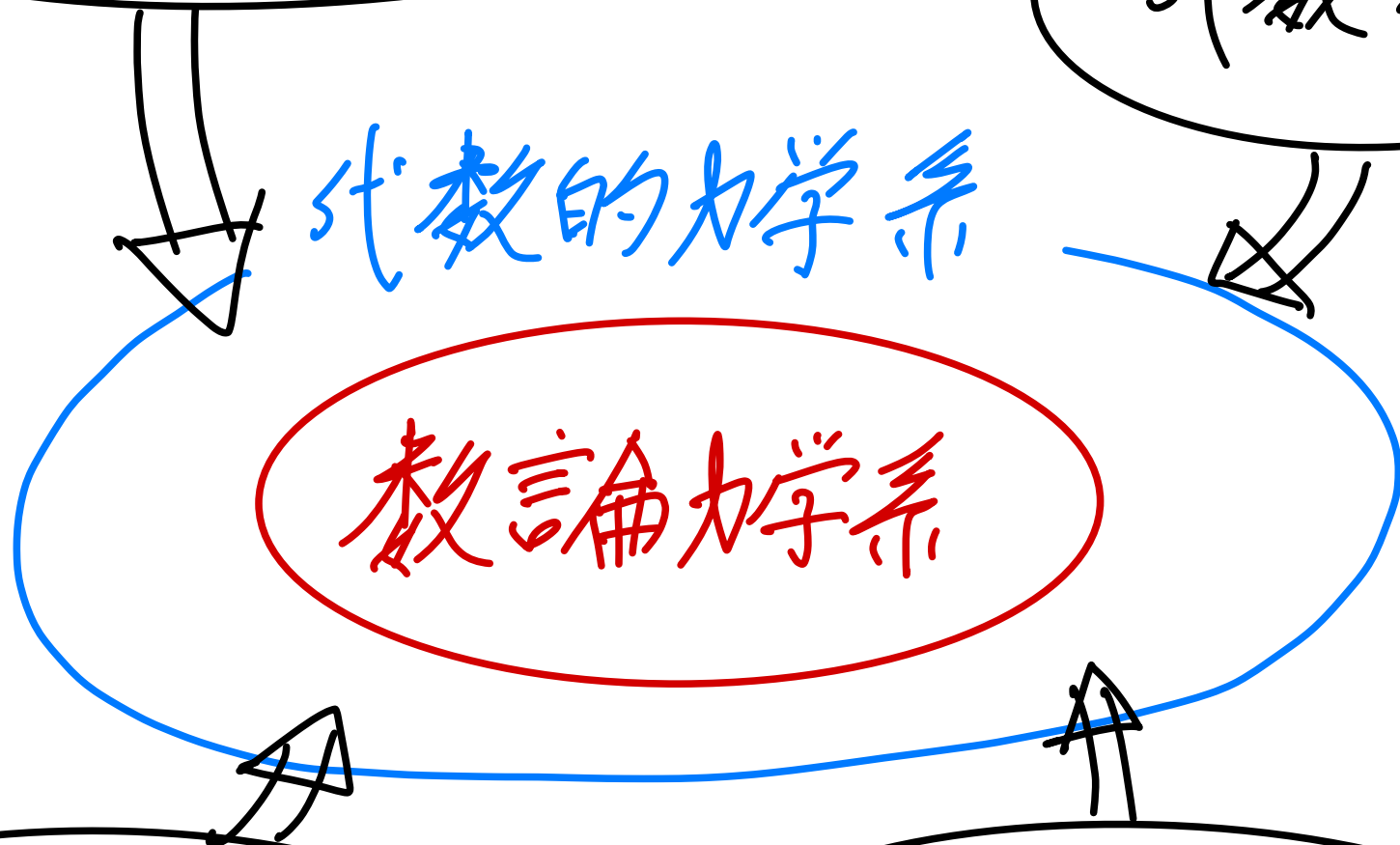
代數幾何

代數的力學系

數論力學系

(複素)力學系

愉快在中間達



力学系 ... "写像の反復合成とする学問"

今日の話

$$f(x) = \sqrt{2}x \notin \mathbb{Q}[x]$$

$$f^2(x) = \underbrace{f \circ f}_{2回}(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}x) = 2x \in \mathbb{Q}[x]$$

Def

$$A := \bigcup_{n \geq 1} \{ f \in \overline{\mathbb{Q}}(x) \mid f^n \in \mathbb{Q}(x) \}.$$

e.g. $f(x) = \sqrt{2}x \in A.$

($\because f^2(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}x) = 2x$)

Motivation: A の元を "明示的に" 書きたい.

★ 多項式の場合は, 次の言い換えがある.:

Thm (Veneziano - Vishikautsan)

$f \in \overline{\mathbb{Q}}[x] \setminus \mathbb{Q}[x] : \text{non-const. } \epsilon \exists \text{ } \exists$.

$f \in A$

$\Leftrightarrow f \sim_{\mathbb{Q}} a x^k g(x^t)$.

$f \neq f''$

• $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ s.t. $a^t \in \mathbb{Q}$.

• $k, t \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{互いに素}$

• $g \in \mathbb{Q}[x]$.

Rem. $f, g \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$ に對して

$$f \sim_{\mathbb{Q}} g$$

$$: \Leftrightarrow \exists l \in \text{PGL}_2(\mathbb{Q}) \text{ s.t. } \begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{f} & P' \\ \downarrow l & \curvearrowright & \downarrow l \\ P' & \xrightarrow{g} & P' \end{array}$$

↑ モジラウの考え方

(ただし、最後に補足する)

$$\text{e.g. } f(x) = \sqrt{-1}x(x^2 + 2x^4)$$

$$= \sqrt{-1}xg(x^2) \in A.$$

$$\uparrow g(x) := x + 2x^2$$

(proof of the Thm)

⇐ ガンバル ♡

⇒ $f \in A$ に $f \in L^2$, $f^n \in \mathbb{Q}[x]$ とする.

$f(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ と表示しておく.

$a_{d-1} = 0$ と L^2 じゃない.

$\left(l(x) := x - \frac{a_{d-1}}{da_d} \right)$ とおくと $f \in A$ と使える

$f^\sigma \neq f$ とある $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ がある.

このとき

$$f = f^\sigma \circ l_1 = l_2 \circ f^\sigma$$

とある $l_1(x) = \alpha_1 x + \beta_1, l_2(x) = \alpha_2 x + \beta_2$ ($\in \bar{\mathbb{Q}}[x]$)

が存在する. ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$)

(cf. Müller & Zieve による, Ritt の分解定理
の書き換え)

あとは, x^{d-1} の係数比較交をガリバル $\square$

Def

$$B := \left\{ f \in \overline{\mathbb{Q}}(x) \mid \begin{array}{l} f \sim_{\mathbb{Q}} \alpha x^k g(x^t) \\ \cdot \alpha^t \in \mathbb{Q}, \\ \cdot k, t \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{互いに素}, \\ \cdot g \in \mathbb{Q}(x). \end{array} \right\}.$$

Rem. 前 Thm より, f が "多項式ならば"
 $f \in A \iff f \in B$

Rem. $B \subset A$.

(☺カ"ハルル)

Question : $f \in A \setminus B$ とする有理関数 f
は存在するか？

~ yes

Def

$f \in \overline{\mathbb{Q}}(x) : \text{Latté's map}$

$:\Leftrightarrow \exists E/\overline{\mathbb{Q}} : \text{橢圓曲線}$

$\exists \pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1 : \text{全射}$

$\exists \phi : E \rightarrow E : \text{射} \quad \text{s.t.}$

$$\begin{array}{ccccc} E & & \xrightarrow{\phi} & & E \\ \pi \downarrow & & \circlearrowleft & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & & \xrightarrow{f} & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Prop

$E/\mathbb{Q} : y^2 = p(x)$, $p(x)$: 既約多項式/ $\mathbb{Q}$

$d \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$: 奇數

$Q \in E(\bar{\mathbb{Q}})[2]$,

f : Lattès map s.t.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P \mapsto [d]P + Q} & E \\ \alpha \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \alpha \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array} .$$

$\Rightarrow f \in A \setminus B$.

(sketch of proof)

• $f^2 \in \mathbb{Q}(x)$ はカニバル $\square$

• $f \notin B$ を示すために, 次の観察が重要である:

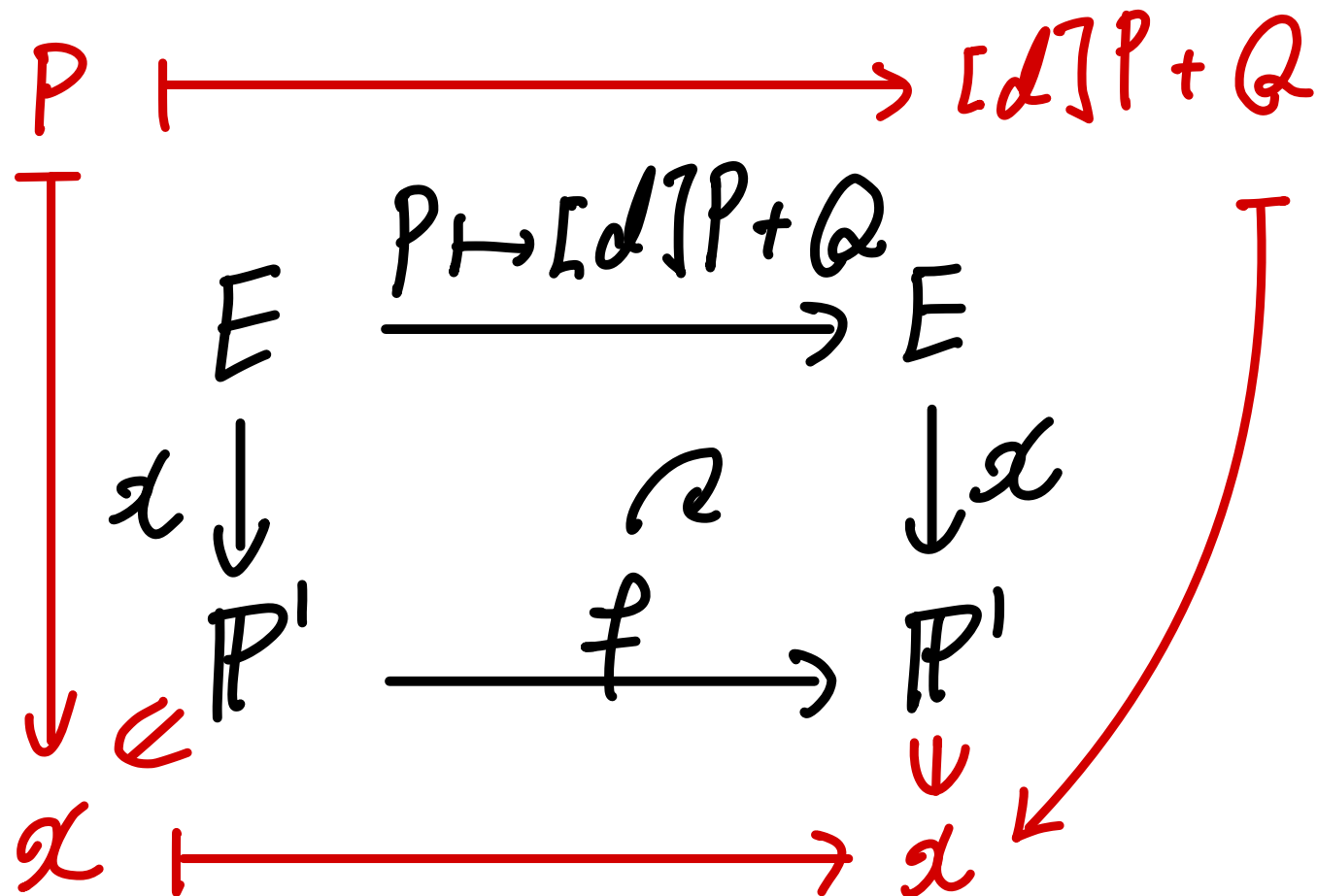
Lem

$$f \in B \Rightarrow f(\{0, \infty\}) \subseteq \{0, \infty\}.$$

特に, f は固定点 $1/\mathbb{Q}$ 4
2-周期点 $1/\mathbb{Q}$ を持つ.

$f \in B$ と仮定する.

例えは f の固定点を持てると



$$\leadsto [d]P + Q = \pm P$$

$$\therefore [d \pm 1]P = -Q$$

↑ 与えられている定義体の
拡大次数が異なる...矛盾. $\square$

Prop

$C = 2 - \sqrt{3}$ とする.

$$f(x) = \frac{Cx^2 - 2x - C}{x^2 + 2Cx - 1} \in A \setminus B.$$

(背景)

"チビ"は7多2頁式"

We can project this map down to a rational function on $\mathbb{P}_1$ in the following way: let $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$, and let t be $\tan(\theta/2)$. Then we get $(x, y) = (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$, and $t = \frac{1-x}{y}$. Thus the map Ψ descends to a map $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\Psi} & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

We show that the map Ψ can be expressed as a rational function in x and y , and thus f as a rational function in t .

Recall the definition of the Chebyshev polynomials: the k -th Chebyshev polynomial of the first kind is the polynomial T_k such that $\cos(k\theta) = T_k(\cos \theta)$, while the k -th Chebyshev polynomial of the second kind is the polynomial U_k such that $\sin((k+1)\theta) = U_k(\cos \theta) \sin \theta$.

Then we have:

$$\cos(k\theta + \varphi) = T_k(x) \cdot \cos \varphi - U_{k-1}(x) \cdot y \cdot \sin \varphi,$$

and

$$\sin(k\theta + \varphi) = U_{k-1}(x) \cdot y \cdot \cos \varphi + T_k(x) \sin \varphi.$$

So that we get

$$(7) \quad f(t) = \frac{2tU_{k-1}(\frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \sin \varphi - (1+t^2)T_k(\frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \cos \varphi + (1+t^2)}{2tU_{k-1}(\frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \cos \varphi + (1+t^2)T_k(\frac{1-t^2}{1+t^2}) \cdot \sin \varphi}.$$

The rational function f acts on $\mathbb{P}_1$ (identified with $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) by sending $t = \tan(\theta/2)$ to $f(t) = \tan(\frac{k\theta + \varphi}{2})$.

We remark that the function (3) is of this shape for $k = 2, \varphi = \pi/6$.

We now consider only those φ such that $\cos \varphi, \sin \varphi$ are algebraic numbers. Then the field of definition of f is $\mathbb{Q}(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Question : $A \setminus B$ の元の "特徴" を述べよ.

→ ????

(参考) モジュラー空間

$$\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) := \left\{ f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cdot d\text{-次の有理関数} \right\} / \text{PGL}_2(\mathbb{C}).$$

$$\frac{\text{Thm}}{\left[\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong A_2(\mathbb{C}). \right]}$$

↑ multiplier を用いて言及出来る.

Def

$$f: P'(C) \rightarrow P'(C).$$

$$\alpha \in \text{Perm}(f).$$

$$\lambda_f(\alpha) := (f^n)'(\alpha) \quad \dots \text{multiplier.}$$

Lem

$$\forall \alpha \in \text{Fix}(f). \quad \lambda_f(\alpha) \neq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha \in \text{Fix}(f)} \frac{1}{1 - \lambda_f(\alpha)} = 1.$$

$f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を 2 次の有理関数とする.

f の固定点の multiplier を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする.

このとき

$$\sigma_1 := \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$\sigma_2 := \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1,$$

$$\sigma_3 := \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

とおく.

すると

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^2, [f] \longmapsto (\sigma_1, \sigma_2)$$

が全単射を与える.

ちなみに

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2$$

が成り立つ.