

都数サマースクール

整数分割

東京理科大学理工学部数学科 1 年 松本隼斗

2020 年 11 月 14 日

概要

整数分割の定義は知ってしまえば誰でも理解できるものである。しかし整数分割はオイラーやガウス、ラマヌジャンなど数多くの数学者たちを魅了し続けた。また未解決問題も多く存在しており、複素解析などの道具を用いることで現在も研究が進められている。ここでは整数分割の初歩的な内容を扱うことにする。

1 整数分割と分割関数

定義 1. 一つの正整数をいくつかの正整数 (和因子) の和に分ける仕方のことを整数分割という。ただし和因子の順番を入れ替えても同じ分割を表すと約束する。そこで大きい和因子を左側に書くことにする。

例 2. 5 の分割

$1 + 1 + 1 + 1 + 1$	5
$3 + 1 + 1$	$4 + 1$
5	$3 + 2$ など

6 の分割

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	6
$3 + 1 + 1 + 1$	$5 + 1$
$3 + 3$	$4 + 2$
$5 + 1$	$3 + 2 + 1$ など

※重複して書かれている分割があるが、これは意図的に書いてある。

定義 3. 整数 n の分割の総数を $p(n)$ とし、これを分割関数という。また $p(n \mid \text{条件})$ を、条件を満たす n の分割の総数を表す。ここで便宜上 $p(0) = 1$ と約束する。

例 4. 4 の分割は以下の五個である。

$$4, \quad 3 + 1, \quad 2 + 2, \quad 2 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1.$$

よって $p(4) = 5$ である。

整数分割の大きな目的の一つとして、分割関数に関する恒等式をたくさん作ることが挙げられる。そこで、Euler が発見した初歩的でかつ興味深い恒等式を紹介する。

定理 5 (Euler). $p(n \mid \text{和因子は奇数}) = p(n \mid \text{和因子はすべて相異なる})$.

この驚くべき結果の具体例として 5 と 6 の場合を前述した. さて, これが任意の自然数に対して成り立つことを示そう. 条件を満たす分割をすべて記述しては日が暮れてしまうので他の方法を考える.

ところで我々は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と偶数全体の集合 $2\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを知っている. これは全単射を用いることで証明できた. 具体的に, $\mathbb{N}$ から $2\mathbb{N}$ へは各元を二倍にし, $2\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ へは各元を等分すればこれは互いに逆写像になっていることが分かる. この考え方を分割恒等式の証明に応用させる.

定理 5 の証明. ($\Rightarrow$) まず和因子がすべて奇数となる分割から和因子が相異なる分割に一意的に定まるように式変形を行う. そこで, 次の操作 $*$ を導入する.

$*$ 「同じ値を持つ二つの和因子が存在するとき, その二つを二倍の大きさの一つの和因子に融合させる」

操作 $*$ をすべての和因子が相異なるようになるまで繰り返す.

($\Leftarrow$) 次に和因子が相異なるような分割から和因子がすべて奇数となるような分割へ一意的に定まるように式変形を行う. これは上の操作と逆の操作をすればよい. すなわち偶数の和因子を二つの等しい和因子に等分すればよい.

以上の操作 (写像) は互いに逆写像になっているので, これで Euler の恒等式は示された. これら二つの操作を 13 の分割の一例を使って式変形してみる.

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 &= (3 + 3) + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &= 6 + 3 + 2 + 2 \\ &= 6 + 3 + (2 + 2) \\ &= 6 + 4 + 3 \end{aligned}$$

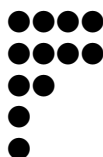
$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad 6 + 4 + 3 &= (3 + 3) + 3 + (2 + 2) = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 \\ &= 3 + 3 + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &= 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

□

ここまでは各分割の式変形による代数的な視点から分割を眺めた. 次にフェラースグラフを導入して分割を幾何的に捉えてみよう.

定義 6. フェラースグラフとは等間隔に並んだドットの行の集まりで, 左端で直線的にそろえられ, 各行の長さは (一番下の行を除いて) そのすぐ下の行の長さ以上となっているものである.

例 7. $4 + 4 + 2 + 1 + 1$ という分割は以下のようなフェラースグラフで表される.

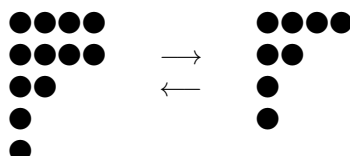


フェラースグラフによる図形変形を施すことで以下の二つの分割恒等式を証明することができる.

定理 8. $p(n \mid \text{最大和因子は } r) = p(n - r \mid \text{すべての和因子は } r \text{ 以下})$.

証明. フェラースグラフから先頭の行を取り除く. 取り除かれた行の長さが r だとすると, 新しいフェラースグラフの行の長さはどれも r 以下になる. すべての和因子が r 以下となるようなグラフに長さ r の行を先頭に付け加えることで最大和因子が r となるグラフが一意的に定まる.

ごちゃごちゃ記述したが, 要するに第 1 行を排除/挿入すればよい. 例として $n = 12, r = 4$ の様子を示す.



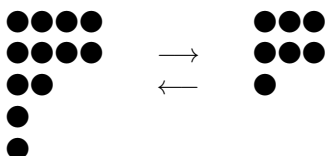
□

定理 9. $p(n \mid m \text{ 個の和因子を持つ}) = p(n - m \mid \text{高々 } m \text{ 個の和因子を持つ})$.

証明. 第 1 列を取り除けば高々 m 個の和因子を持つ $n - m$ の分割に一意的に定まる. なぜなら第 1 列の長さは行の数, すなわち分割に現れる和因子の数に等しいからである.

逆に, 第 1 列に m 個のドットを付け加えれば m 個の和因子を持つような n の分割に一意的に定まる.

ここでも上の定理と同様に例を添えておこう. $n = 12, m = 5$ のときを示す.

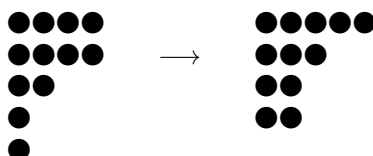


□

フェラースグラフに慣れたところで, 次に少し複雑な操作を定義する.

定義 10. フェラースグラフの裏返し操作を共役という. すなわち共役とは第 i 行と第 i 列を入れ替える操作である.

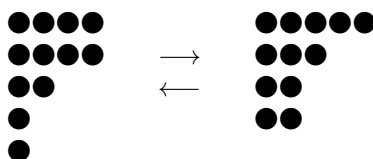
例 11. 例 3 の分割 $4 + 4 + 2 + 1 + 1$ を共役操作してみよう.



共役操作を行うだけで次の分割恒等式が成り立つのは容易にわかるだろう.

定理 12. $p(n \mid m \text{ 個の和因子を持つ}) = p(n \mid \text{最大和因子は } m)$.

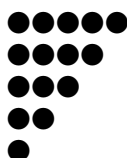
例 13. $n = 12, m = 5$ のとき



共役を導入すると次のような特徴的な分割が考えられる.

定義 14. 共役が自分自身と一致するような分割を自己共役という.

例 15. 下のフェローズグラフは $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ を表していて, これは自己共役である.



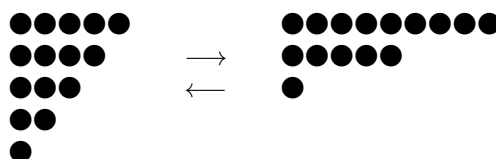
ここで自己共役が一意的に定まるかという疑問が挙げられる. これはフェローズグラフが一意的に表されることからわかるだろう. 自己共役を導入したところで次の分割恒等式を得ることができる.

定理 16. $p(n \mid \text{自己共役}) = p(n \mid \text{和因子は相異なる奇数})$.

証明. ($\Rightarrow$) 第 i 行と第 i 列を取り出し, それらをまっすぐに伸ばして新しい i 行とすればよい.

($\Leftarrow$) 和因子が相異なる奇数であるような分割において各和因子を, 中心で折り曲げて対称な鍵型をつくり合わせればよい.

上の $n = 15$ の例を考えると, 次のようになる.



□

2 $p(n)$ の上界

我々は新しい関数を定義したら何に興味があるだろうか. まず最初は関数の形だろう. しかしこれは容易に想像できる. 次にその関数の行先の様子に興味がある. 分割関数 $p(n)$ が単調増加関数であることは直観的に分かる (後に補題として厳密に証明する). さてその発散スピードはどれくらいなのだろうか. 対数関数のようにゆっくり発散するのか. あるいは指数関数のように目覚ましい発散スピードを展開するのだろうか.

結論を先に書いてしまおう.

定理 17. $p(n) \leq F_{n+1}$.

ただしこの F_{n+1} は $n + 1$ 番目の Fibonacci 数を表す. 一見分割に関係のない Fibonacci 数がここで登場するのが, なんとも美しい結果であろう. この驚くべき定理を二つの補題を示したあと, n に関する帰納法で示す.

補題 18. $p(n)$ は n の単調増加関数である.

証明. 背反な場合分けによって以下の等式が成り立つ.

$$p(n) = p(n \mid 1 \text{ を和因子に持つ}) + p(n \mid 1 \text{ を和因子に持たない})$$

ここで 1 を和因子に持つ n の分割の総数は, $n - 1$ の分割の総数と一致する. なぜなら $n - 1$ の分割において 一個のドットを一番下に付け加えれば 1 を和因子に持つ n の分割になるからである. よって上の等式から, 次が得られる.

$$p(n) > p(n - 1).$$

□

補題 19. $p(n) \leq p(n - 1) + p(n - 2).$

証明. 具体例として $n = 6$ のときを証明する. まず和因子に 2 を挿入／除外することで以下の等式が成り立つ.

$$p(4) = p(6 \mid \text{少なくとも一つの和因子は 2 に等しい})$$

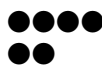
次に少なくとも一つの和因子が 2 に等しい分割において, 最小和因子を 2 を一個と残りすべてを 1 に和因子とする (この操作を $*$ とする) ことで新しい分割が一意的に定まる (左から二番目の分割は一度考えないものとする). では操作 $*$ の逆はどうすればよいのだろうか. これは素朴に定めてやればよい. 操作 $*$ を施した後の分割は和因子に 1 を含まない. よってその分割の最小和因子 (2 以上である) を 2 を一個と残りをすべて 1 に分割する (この操作を $*$ ' とする) ことで元の分割に戻る. これで一対一対応する分割が存在することを確認することができた.

しかしここで一つ問題が生じてしまう. それは下のフェローズグラフを見れば分かることだが, 左から二番目の分割に注目してほしい. 前述した操作 $*$ を施すと, 次のようなグラフになる.



これはフェローズグラフの記述の仕方に反する. なぜなら大きい和因子は本来上を書くべきであるからだ.

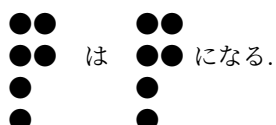
では次に示すように, 和因子を交換すれば一対一対応が保たれるのではないかと考える.



一見よさそうに見えるがこれでは一対一対応しないのだ. なぜなら上の分割において操作 $*$ ' を施すと次のような分割になってしまう.



もちろんこれは操作 $*$ を施す前の分割とは一致しない. ゆえにこの分割だけ特別な対応を考えたい. ここは素朴に “そのまま”, つまり何もしないという写像 (恒等写像) とすればこの分割は一対一対応する. すなわち



ここで注意したいのは、今考えた左から二番目の分割と、右から一、二番目の分割の対応付けは全く異なるものだということである。前者は何もしない“そのまま”という操作、後者は操作 $*$ 、 $*$ 'を採用している。

以上の考察から補題を示そう。今、下のフェローズグラフにおいて、次の関係式を記述したい。

$$\text{「上の分割の総数」} = \text{「真ん中の分割の総数」} = \text{「下の分割の総数」}.$$

左側の等式はもう前述したがもう一度書いておこう。

$$p(4) = p(6 \mid \text{少なくとも一つの和因子が } 2 \text{ に等しい})$$

問題は右の等式である。特別な対応の部分はどう記述するかがポイントになる。これはなぜ特別な対応を考えなければならなくなったのかを考察すればよい。それは 1 でない最小和因子よりも、 $2 + \text{和因子 } 1 \text{ の個数}$ の方が大きいために生じた問題であった(文字で分からなかったらもう一度グラフを眺めてほしい)。よって次のような等式が得られる。

$$\begin{aligned} & p(6 \mid \text{少なくとも一つの和因子は } 2 \text{ に等しい}) \\ &= p(6 \mid 1 \text{ を和因子に持たない}) + p(4 \mid 1 \text{ でない最小和因子} < 2 + \text{和因子 } 1 \text{ の個数}). \end{aligned}$$

ここで分割関数 $p(n)$ は 0 以上なので次のような評価ができる。

$$p(6 \mid \text{少なくとも一つの和因子は } 2 \text{ に等しい}) \geq p(6 \mid 1 \text{ を和因子に持たない}).$$

以上から次の不等式が得られる。

$$p(4) \geq p(6 \mid 1 \text{ を和因子に持たない}).$$

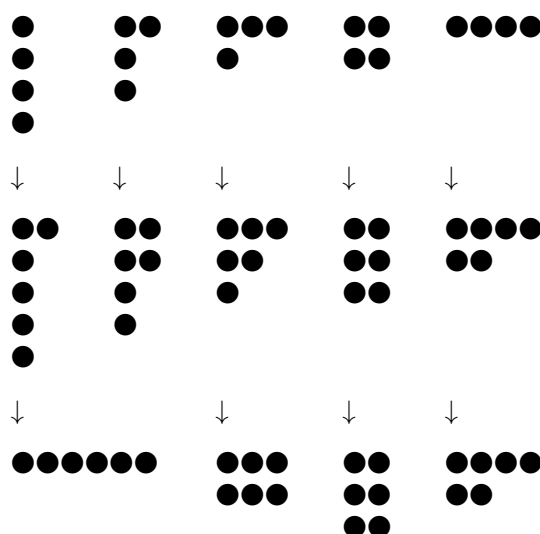
この考察から一般に次が得られる。

$$p(n-2) \geq p(n \mid 1 \text{ を和因子に持たない}).$$

これと補題 18 の途中式から次が成り立つ。

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2).$$

以上により、補題 2 が示された。



□

さてこの二つの補題を組み合わせて定理を n に関する帰納法で示そう.

定理 17 の証明. $p(0) = F_1 = 1, p(1) = F_2 = 1$ より, $n = 0, 1$ のときに定理が成り立つのは明らかである.
 $n - 2, n - 1$ のときに定理が成り立つと仮定する. このとき補題 19 と帰納法の仮定から, 次が得られる.

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2) \leq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}.$$

よって n のときも成り立つので題意が示された. □

注意 20. ここで上界について今回はフェラーズグラフを用いて紹介した. 勿論これ以外にも結果は異なるが上界を求める方法があることが知られている. これに関しては参考文献 [2] を参照してほしい.

最後に分割関数 $p(n)$ の下界について考えることができる. しかしその証明方法は初等的な計算で示すことができるので証明は読者に任せることにする. 証明の手法は二項係数の評価を用いることになる. 次が下界の結果である.

$$\frac{1}{e^5 n^2} e^{2\sqrt{n}} \leq p(n).$$

参考文献

- [1] ジョージ・アンドリュース, キムモ・エリクソン (佐藤文広 訳), 『整数分割』, 数学書房.
- [2] J. マトウシェク, J. ネシエトリル (根上生也, 中本敦浩 訳), 『離散数学への招待・下』, 丸善出版.