

Bessel関数と連分数

$\nu > -1$ に對し

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

は Bessel 関数と云う。

Fact

← 収束経路無限大

- $J_\nu(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}$ に對し 絶対収束する。
- $J_\nu(x)$ は次のようにも表せる:

$$J_\nu(x) = \frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2i\pi x\right)$$

$$\cdot {}_1F_1(a, b, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cdot (a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

Bessel 関数は、次の漸化式式を満す:

Prop

$x \neq 0$ と $\nu > 0$ に對し、次の成り立つ:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\nu \frac{x}{x^2} J_\nu(x).$$

pf. 両辺の $\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu+1}$ の係数を比較すれば分かる。

実際

$$(\text{右辺の係数}) = \nu \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)! \Gamma(\nu+n+2)}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺の係数}) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)! \Gamma(\nu+n+1)} + \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+2)} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \left\{ \frac{1}{(n+1) \Gamma(\nu+n+1)} - \frac{1}{\Gamma(\nu+n+2)} \right\} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \left\{ \frac{\nu+n+1}{(n+1) \Gamma(\nu+n+2)} - \frac{1}{\Gamma(\nu+n+2)} \right\} \\
 &\quad (\odot \Gamma(\nu+1) = \nu \Gamma(\nu)) \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \frac{\nu}{(n+1) \Gamma(\nu+n+2)} \\
 &= \nu \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)! \Gamma(\nu+n+2)} \quad \square
 \end{aligned}$$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

次に、 J_ν を積分表示しよう

このために Beta 関数 $B(\nu+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\nu+1)}$ についで考える。

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$\uparrow \odot \Gamma(n+1) = n \Gamma(n), \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

よ、次に求める：

$$B(\nu+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu+\frac{1}{2}) \frac{(2n)!}{2^{2n} n! \Gamma(n+\nu+1)}$$

$$\therefore J_\nu(x) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} B(\nu+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) x^{2n}$$

$$= \frac{2\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x \sin\varphi)^{2n} d\varphi$$

$$\left(\text{①} \odot B(\nu+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \cos^{2\nu}\varphi d\varphi \right)$$

$$= \frac{2\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi) \cos^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$\left(\text{①} \odot \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right)$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi) \cos^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$\left(\text{①} \odot \text{被積分関数は偶関数} \right)$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi} \cos(x \cos\varphi) \sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$\left(\text{①} \odot \varphi \in \frac{\pi}{2} - \varphi \text{ におきかえ} \right)$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi} e^{ix \cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$\left(\text{①} \odot \cos x \text{ を複素指数関数に変形し, その虚部は } 0 \text{ であることに注意する. } \frac{\pi}{2} \text{ だけ積分} \right)$$

$$= \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 e^{ix\varphi} (1-\varphi^2)^{\nu-\frac{1}{2}} d\varphi \quad \int_0^{\pi} - \int_{\pi}$$

$$\left(\text{①} \odot \varphi = \cos\varphi \right)$$

この積分表示により、初等関数に Bessel 関数を表現できる：

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 e^{i\gamma x} d\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (1-\gamma^2) e^{i\gamma x} d\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

$$\text{t.} \odot \int_{-1}^1 e^{i\gamma x} d\gamma = \frac{2 \sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \gamma^2 e^{i\gamma x} d\gamma \\ &= \frac{2 \sin x}{x} + \frac{4 \cos x}{x^2} - \frac{4 \sin x}{x^3} \end{aligned}$$

また Bessel 関数の漸化式を用いると次の式が得られる：

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x} - J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

Lemma

関数列 $\{f_i(x)\}$ は次を満たす:

$$c_i f_{i-1} = a_i f_i + b_{i+1} x f_{i+1} \quad (i \geq 1)$$

ただし a_i, b_i, c_i は変数 x を含まない定数である.

このとき次が成り立つ:

$$\frac{f_1}{f_0} = \left[0; \frac{c_1}{a_1}, \frac{b_2 c_2 x}{a_2}, \frac{b_3 c_3 x}{a_3}, \dots \right]$$

pf. $\frac{f_1}{f_0} = \frac{c_1}{a_1 + b_2 x \cdot f_2/f_1}$

$$= \frac{c_1}{a_1 + \frac{c_2 b_2 x}{a_2 + b_3 x \cdot f_3/f_2}}$$

$$= \frac{c_1}{a_1 + \frac{c_2 b_2 x}{a_2 + \frac{c_3 b_3 x}{a_3 + b_4 x \cdot f_4/f_3}}}$$

= ... $\square$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2 \cdot \frac{x}{x^2} \cdot J_{\nu}(x).$$

この Lemma にあて

$$f_i(x) = J_{i+\nu}(x), \quad a_i = 2(i+\nu), \quad b_i = -1, \quad c_i = x$$

を適用すると、次が得られる:

$$\begin{aligned} \frac{J_{\nu+1}(x)}{J_{\nu}(x)} &= \left[0; \frac{x}{2(1+\nu)}, \frac{-x^2}{2(2+\nu)}, \frac{-x^2}{2(3+\nu)}, \dots \right] \\ &= \frac{x}{2(1+\nu) - \frac{x^2}{2(2+\nu) - \frac{x^2}{2(3+\nu) - \dots}}} \end{aligned}$$

特^に $y = -\frac{1}{2}$ とする^と, $\tan x$ の連分教展開が得られる:

$$\tan x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{\ddots}}}} \quad \left(\begin{array}{l} \textcircled{\text{①}} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{array} \right)$$

さらに $0 < x < \frac{\pi}{2}$ なら, $x \in \mathbb{Q}^+$ なら $\tan x \notin \mathbb{Q}$ となることを示す。

① $x = \frac{m}{n}$ とする

$$\tan \frac{m}{n} = \frac{\frac{m}{n}}{1 - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{3 - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{5 - \frac{m^2}{n^2} \ddots}}} = \frac{\frac{m}{n}}{n - \frac{\frac{m^2}{n^2}}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{\ddots}}}}$$

このことを用いて, 次の Lem を用いて示すことができる: (1) π は無理数である

Lem (Euler)

$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k}]$ とする. ($a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{>0}$)

$\exists i_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall i > i_0, 0 < b_i \leq a_i$

$\Rightarrow k \rightarrow \infty$ のとき右辺の級数は収束する。

また, このとき無限連分教は無理数である。

例えば, $y \in \mathbb{Q}^+$ なら $\arctan y \notin \mathbb{Q}$ である。

(① $x := \arctan y \in \mathbb{Q}^+$ と仮定する。

前述したことから, $y = \tan x \notin \mathbb{Q}$... 矛盾.)

特^に, $\pi = \arctan 1 \notin \mathbb{Q}$ である。